GMFH - Gesellschaft für Mathematik an Schweizer Fachhochschulen
SMHES - Société pour les Mathématiques dans les Hautes Ecoles Spécialisées suisses

Mathematik-Referenzaufgaben zum Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität (RLP-BM 2012)

Grundsatzfrage 8

- … elementare Potenz- und Wurzelgleichungen lösen (auch ohne Hilfsmittel).

- … elementare Exponential- und Logarithmusgleichungen lösen (auch ohne Hilfsmittel).

- … elementare Betragsgleichungen lösen (auch ohne Hilfsmittel).

Hannes Böhi (HSR Rapperswil)

Aufgabe 1 (Lösen von Gleichungen durch Potenzieren bzw. Logarithmieren: Gegenüberstellung)

Lösen Sie jede der folgenden Gleichungen nach x auf:

a) $x^{3.4} = 5$ b) $3.4^x = 5$ c) $\log_{3.4}(x) = 5$ d) $\log_x(3.4) = 5$

Lösung

a) $x^{3.4} = 5$ Beide Seiten der Gleichung potenzieren mit $\frac{1}{3.4}$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 5^{\frac{1}{3.4}}}}$$

b) $3.4^x = 5$ Logarithmieren mit ln oder log $(=\log_{10})$ oder $\log_{3.4}$
oder Logarithgmus mit irgendeiner Basis $b > 0$ und $b \neq 1$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \ln(3.4) = \ln(5) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\ln(5)}{\ln(3.4)}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot \log(3.4) = \log(5) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\log(5)}{\log(3.4)}}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \log_{3.4}(5) = \frac{\ln(5)}{\ln(3.4)} = \frac{\log(5)}{\log(3.4)} = \frac{\log_b(5)}{\log_b(3.4)}}}$$

c) $\log_{3.4}(x) = 5 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3.4^5}}$

d) $\log_x(3.4) = 5 \Leftrightarrow x^5 = 3.4 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3.4^{\frac{1}{5}}}}$

Aufgabe 2 (Wurzelgleichung)

Lösen Sie nach x auf: $3(x+4) = 5 \cdot \sqrt{x^2+8x}$

Lösung

$3(x+4) = 5 \cdot \sqrt{x^2+8x}$

$\Leftrightarrow \quad 9(x+4)^2 = 25(x^2+8x) \ \wedge \ x+4 \geq 0$

Die Zusatzbedingung $x+4 \geq 0$ ergibt sich aus der ersten Gleichung, weil dort die rechte Seite ≥ 0 ist. Aus der zweiten Gleichung erhält man nun wieder die erste, indem man auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens die Wurzel zieht. Auf der linken Seite erhält man dann

$\sqrt{9(x+4)^2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{(x+4)^2} = 3 \cdot |\, x+4 \,| \overset{\text{nur falls } x+4\geq 0}{=} 3(x+4)$

Um von der zweiten Gleichung wieder auf die erste zu kommen, ist also die Zusatzbedingung $x+4 \geq 0$ unerlässlich.

$\Leftrightarrow \quad 9(x^2+8x+16) = 25x^2+200x \ \wedge \ x \geq -4$

$\Leftrightarrow \quad 0 = 16x^2+128x-144 \ \wedge \ x \geq -4$

$\Leftrightarrow \quad x^2+8x-9 = 0 \ \wedge \ x \geq -4$

$\Leftrightarrow \quad (x+9)(x-1) = 0 \ \wedge \ x \geq -4$

$\Leftrightarrow \quad x \in \{-9\,;1\} \ \wedge \ x \geq -4$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 1}}$

Aufgabe 3 (Logarithmische Gleichung)

Berechnen Sie x aus $7^{x^2+3x} = 2$

Lösung

$7^{x^2+3x} = 2$ Ist ein Exponent ein Ausdruck in der Unbekannten, sollte nach Möglichkeit logarithmiert werden.

$\Leftrightarrow \quad \ln\left(7^{x^2+3x}\right) = \ln(2) \quad \Leftrightarrow \quad (x^2+3x) \cdot \ln(7) = \ln(2)$

$\Leftrightarrow \quad x^2+3x = \dfrac{\ln(2)}{\ln(7)} \quad \Leftrightarrow \quad x^2+3x - \dfrac{\ln(2)}{\ln(7)} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot \frac{\ln(2)}{\ln(7)}}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - \frac{\ln(16)}{\ln(7)}}}{2}}}$$

Aufgabe 4 (Exponentialgleichung)

Berechnen Sie x aus $2^{\left(3^{\left(6^x\right)}\right)} = 11$

Stelle dabei x allein mit Hilfe der Logarithmusfunktion $\ln$ dar.

Lösung

$2^{\left(3^{\left(6^x\right)}\right)} = 11$ Ist ein Exponent ein Ausdruck in der Unbekannten, sollte nach Möglichkeit logarithmiert werden.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ 3^{\left(6^x\right)} \cdot \ln(2) = \ln(11) && \text{Logarithmieren}\\
&\Leftrightarrow\ \ln\left(3^{\left(6^x\right)}\right) + \ln(\ln(2)) = \ln(\ln(11)) && \text{Logarithmieren hilft hier nicht weiter!}\\
&\Leftrightarrow\ 6^x \cdot \ln(3) = \ln(\ln(11)) - \ln(\ln(2)) && \text{Logarithmieren}\\
&\Leftrightarrow\ \ln\left(6^x\right) + \ln(\ln(3)) = \ln\big(\ln(\ln(11)) - \ln(\ln(2))\big) && \text{Logarithmieren}\\
&\Leftrightarrow\ x \cdot \ln(6) = \ln\big(\ln(\ln(11)) - \ln(\ln(2))\big) - \ln(\ln(3))\\
&\Leftrightarrow\ \underline{\underline{x = \frac{\ln\big(\ln(\ln(11)) - \ln(\ln(2))\big) - \ln(\ln(3))}{\ln(6)}}}
\end{aligned}
$$

Selbstverständlich gibt es verschiedene Lösungsvarianten. So könnte man etwa die zweite Gleichung zuerst durch $\ln(2)$ teilen:

$$
\begin{aligned}
&3^{\left(6^x\right)} \cdot \ln(2) = \ln(11)\\
&\Leftrightarrow\ 3^{\left(6^x\right)} = \frac{\ln(11)}{\ln(2)} && \text{Logarithmieren}\\
&\Leftrightarrow\ 6^x \cdot \ln(3) = \ln\left(\frac{\ln(11)}{\ln(2)}\right)\\
&\Leftrightarrow\ 6^x = \frac{\ln\left(\frac{\ln(11)}{\ln(2)}\right)}{\ln(3)} && \text{Logarithmieren}\\
&\Leftrightarrow\ x \cdot \ln(6) = \ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(11)}{\ln(2)}\right)}{\ln(3)}\right)\\
&\Leftrightarrow\ \underline{\underline{x = \frac{\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(11)}{\ln(2)}\right)}{\ln(3)}\right)}{\ln(6)}}}
\end{aligned}
$$

Der Nachteil bei dieser Darstellung sind allenfalls die vielen Bruchstriche. Weiterer Lösungsweg:

$$2^{\left(3^{\left(6^x\right)}\right)} = 11 \Leftrightarrow 3^{\left(6^x\right)} = \log_2(11) \Leftrightarrow 6^x = \log_3(\log_2(11))$$

$$\Leftrightarrow\ \underline{\underline{x}} = \log_6(\log_3(\log_2(11))) = \underline{\underline{\frac{\ln\left(\frac{\ln\left(\frac{\ln(11)}{\ln(2)}\right)}{\ln(3)}\right)}{\ln(6)}}}$$

Aufgabe 5 (Exponentialgleichung)

Berechnen Sie x aus $9^x + 2 \cdot 3^x = 8$

Lösung

$3 \cdot 9^x = 7 \cdot 3^x - 2$ — Beachte: $9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$

$\Leftrightarrow \quad 3 \cdot (3^x)^2 - 7 \cdot 3^x + 2 = 0$ — quadratische Gleichung für 3^x

$$\Leftrightarrow \quad 3^x = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{6} = \frac{7 \pm 5}{6} = \begin{cases} 2 \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \quad 3^x = 2 \lor 3^x = 3^{-1}$ — Logarithmieren

$\Leftrightarrow \quad x \cdot \ln(3) = \ln(2) \lor x = -1$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} \lor x = -1}}$$

Aufgabe 6 (Exponentialgleichung)

Berechnen Sie x aus $2^x + 32 \cdot 2^{-x} = 12$

Lösung

$2^x + 32 \cdot 2^{-x} = 12$ — Multiplikation mit 2^x

$\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 + 32 = 12 \cdot 2^x$ — quadratische Gleichung für 2^x

$\Leftrightarrow \quad (2^x)^2 - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(2^x - 4\right)\left(2^x - 8\right) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2^x = 4 \lor 2^x = 8$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2 \lor x = 3}}$

Vorbemerkung zu den Aufgaben 7 und 8

Für reelle Zahlen a gilt: $\boxed{\sqrt{a^2} = |a| = \text{Abstand der Zahl } a \text{ vom Ursprung} = \begin{cases} a, & \text{falls } a \geq 0 \\ -a, & \text{falls } a < 0 \end{cases}}$

Aufgabe 7

Vereinfachen Sie: $\sqrt{x^2} - x$

Lösung

$$\sqrt{x^2} - x = \underline{\underline{|x| - x}} = \begin{cases} 0, & \underline{\text{nur}} \text{ falls } x \geq 0 \\ -2x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

Aufgabe 8 (Betrags-Gleichungen und Betrags-Ungleichungen)

a) Berechnen Sie alle Zahlen x, welche die folgende Gleichung erfüllen: $|x-3| = 5$

Lösung

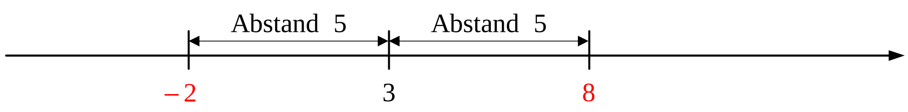
$|x-3| = 5$

$\Leftrightarrow \quad x-3 = \pm 5$ Es gibt 2 Zahlen, die den Betrag 5 und somit von 0 den Abstand 5 haben, nämlich 5 und -5.

$\Leftrightarrow \quad x-3 = 5 \;\vee\; x-3 = -5$ x ist somit um 5 grösser oder um 5 kleiner als 3, d.h. x hat von 3 den Abstand 5.

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 8 \;\vee\; x = -2}}$ Dies ist eine erste Darstellung der Lösungen 8 und -2.

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x \in \{-2\,;8\}}}$ Eine weitere Möglichkeit: Zusammenfassung der beiden Lösungen 8 und -2 in einer Menge (Lösungsmenge)



b) Berechnen Sie alle Zahlen x, welche die folgende Ungleichung erfüllen: $|2x+3| < 7$
Geben Sie die Lösungsmenge mit Hilfe von einem oder mehreren Intervallen an.

Lösung

Betragsstriche können immer entweder weggelassen oder durch Klammern mit Faktor (-1) vor der ersten Klammer ersetzt werden, je nachdem die Zahl zwischen den Betragsstrichen positiv oder negativ ist. In diesem Fall gilt

$$|2x+3| = \begin{cases} 2x+3\,, & \text{falls } 2x+3 \geq 0 \\ -(2x+3)\,, & \text{falls } 2x+3 < 0 \quad \left[2x+3 \leq 0 \text{ wäre hier auch richtig}\right] \end{cases}$$

Aus diesem Grund unterscheiden wir zwei Fälle:

1. Fall: Für die gesuchte Zahl x gelte $2x+3 \geq 0$ und somit $x \geq -\frac{3}{2}$, d.h. wir suchen zuerst im Intervall $\left[-\frac{3}{2}\,;\infty\right[$ nach Zahlen x, welche die gegebene Ungleichung erfüllen:

$|2x+3| < 7 \;\wedge\; 2x+3 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 2x+3 < 7 \;\wedge\; x \geq -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x < 4 \;\wedge\; x \geq -\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x < 2 \;\wedge\; x \geq -\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x \in \left[-\frac{3}{2}\,;2\right[}$ oder anders geschrieben: $\underline{x \in \left[-\frac{3}{2}\,;2\right)}$

2. Fall: Für die gesuchte Zahl x gelte $2x+3 < 0$ und somit $x < -\frac{3}{2}$, d.h. wir suchen jetzt im Intervall $\left]-\infty\,;-\frac{3}{2}\right[$ nach Zahlen x, welche die gegebene Ungleichung erfüllen:

$|2x+3| < 7 \;\wedge\; 2x+3<0$

$\Leftrightarrow \quad -(2x+3) < 7 \;\wedge\; x<-\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad -2x < 10 \;\wedge\; x<-\frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad x > -5 \;\wedge\; x<-\frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{x \in \left]-5\,;-\frac{3}{2}\right[}$

Schlussresultat: $x \in \left]-5\,;-\frac{3}{2}\right[\cup \left[-\frac{3}{2}\,;2\right[$, d.h. $\underline{\underline{x \in \left]-5\,;2\right[}}$

Der Lösungsweg und das Resultat lassen sich noch optisch veranschaulichen: