GMFH - Gesellschaft für Mathematik an Schweizer Fachhochschulen
SMHES - Société pour les Mathématiques dans les Hautes Ecoles Spécialisées suisses

Mathematik-Referenzaufgaben zum Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität (RLP-BM 2012)

Grundsatzfrage 7

- … die Potenzgesetze mit ganzzahligen und rationalen Exponenten verstehen und anwenden (auch ohne Hilfsmittel)

- … die Hierarchie der Operationen erkennen und anwenden.

- … die Logarithmengesetze bei Berechnungen sowie bei Umformungen anwenden (auch ohne Hilfsmittel)

- … Terme mit Logarithmen zu verschiedenen Basen umformen und berechnen.

Hannes Böhi (HSR Rapperswil)
Roger Filliger (BFH-TI Biel/Bienne)

Aufgabe 1 (Potenzgesetze)

Vereinfachen und berechnen Sie:

a) $\sqrt{2}^4$ b) $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$ c) $\sqrt{0.04}$

d) $a^{-4}a^{n+3}$ e) $\sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a}}$ für $a>0$ f) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$

g) $25^{0.5}$ h) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}$ i) $\sqrt{27^{-\frac{2}{3}}}+5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}$

Lösungen

a) $\sqrt{2}^4 = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 2^{\frac{1}{2}\cdot 4} = 2^2 = \underline{\underline{4}}$ oder: $\sqrt{2}^4 = \left(\sqrt{2}^2\right)^2 = 2^2 = \underline{\underline{4}}$

b) $\left(-\frac{5}{2}\right)^4 = (-1)^4\cdot\frac{5^4}{2^4} = \underline{\underline{\frac{625}{16}}}$

c) $\sqrt{0.04} = \sqrt{\frac{4}{100}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{100}} = \frac{2}{10} = \underline{\underline{0.2}}$

d) $a^{-4}a^{n+3} = a^{-4+n+3} = \underline{\underline{a^{n-1}}}$

e) $\sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a}} = \left(a^3\cdot a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(a^{3+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = a^{\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}} = \underline{\underline{a^{\frac{2}{3}}}} = \underline{\underline{\sqrt[3]{a^2}}}$

Beachte:
Für negative Basen a ist der gegebene Term ebenfalls definiert und lässt sich vereinfacht als $\sqrt[3]{a^2}$ schreiben, nicht aber als $a^{\frac{2}{3}}$, da Potenzen mit gebrochen-rationalen Exponenten nur für nichtnegative Basen definiert sind. Begründung der Vereinfachung im Fall $a<0$: Für negative Zahlen a gilt $a=(-1)\cdot|a|$ und somit

$$\sqrt[5]{a^3\sqrt[3]{a}} \overset{a<0}{=} \sqrt[5]{\left((-1)\cdot|a|\right)^3\cdot\sqrt[3]{(-1)\cdot|a|}} = \sqrt[5]{(-1)^3\cdot|a|^3\cdot(-1)\cdot\sqrt[3]{|a|}}$$

$$= \sqrt[5]{|a|^3\cdot\sqrt[3]{|a|}} = \left(|a|^3\cdot|a|^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(|a|^{3+\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = |a|^{\frac{10}{3}\cdot\frac{1}{5}}$$

$$= |a|^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{|a|^2} = \underline{\underline{\sqrt[3]{a^2}}}$$

f) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2\cdot 4} = \sqrt[3]{8} = \underline{\underline{2}}$ oder $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4} = 2^{\frac{1}{3}}\cdot(2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}} = \underline{\underline{2}}$

g) $25^{0.5} = 25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = \underline{\underline{5}}$ [Achtung: nur 5, nicht -5]

h) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}} \overset{a \text{ ist hier positiv, sonst wäre } \sqrt{a} \text{ nicht definiert}}{=} \dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{2}}\cdot a^{\frac{1}{3}}} = a^{\frac{5}{6}-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = a^{\frac{5-3-2}{6}} = a^0 = \underline{\underline{1}}$

i) $\sqrt{27^{-\frac{2}{3}}}+5^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}} = (3^3)^{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}}+5^1 = 3^{-1}+5 = \frac{1+15}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$

Aufgaben zu den Logarithmengesetzen

Aufgabe 2

Vereinfachen und berechnen Sie:

a) $\log_5(1)$ b) $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$ c) $\log_{\frac{1}{8}}(64)$

d) $\log_{0.1}(0.0001)$ e) $\log_3(\sqrt{3})$ f) $\log_{100}(0.01)$

Lösungen

a) $\log_5(1) = \underline{\underline{0}}$, denn $5^0 = 1$

b) $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right) = \log_4\left(4^{-\frac{2}{3}}\right) = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$, denn $4^{-\frac{2}{3}} = 4^{-\frac{2}{3}}$ (Farben beachten)

oder mit Basiswechsel: $\log_4\left(\frac{1}{\sqrt[3]{16}}\right) = \log_4\left(4^{-\frac{2}{3}}\right) = \frac{\ln\left(4^{-\frac{2}{3}}\right)}{\ln(4)} = \frac{-\frac{2}{3}\cdot\ln(4)}{\ln(4)} = \underline{\underline{-\frac{2}{3}}}$

c) $\log_{\frac{1}{8}}(64) = \log_{2^{-3}}(2^6) = \underline{\underline{-2}}$, denn $\left(2^{-3}\right)^{-2} = 2^6$

oder mit Basiswechsel: $\log_{\frac{1}{8}}(64) = \frac{\ln(64)}{\ln\left(\frac{1}{8}\right)} = \frac{\ln(2^6)}{\ln(2^{-3})} = \frac{6\,\cancel{\ln(2)}}{-3\,\cancel{\ln(2)}} = \underline{\underline{-2}}$

d) $\log_{0.1}(0.0001) = \log_{10^{-1}}(10^{-4}) = \underline{\underline{4}}$, denn $\left(10^{-1}\right)^4 = 10^{-4}$

oder mit Basiswechsel: $\log_{0.1}(0.0001) = \log_{10^{-1}}(10^{-4}) = \frac{\ln(10^{-4})}{\ln(10^{-1})} = \frac{-4\,\cancel{\ln(10)}}{-1\cdot\cancel{\ln(10)}} = \underline{\underline{4}}$

e) $\log_3(\sqrt{3}) = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$, denn $3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

oder mit Basiswechsel: $\log_3(\sqrt{3}) = \frac{\lg\left(3^{\frac{1}{2}}\right)}{\lg(3)} = \frac{\frac{1}{2}\lg(3)}{\lg(3)} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$

f) $\log_{100}(0.01) = \underline{\underline{-1}}$, denn $100^{-1} = 0.01$

oder mit Basiswechsel: $\log_{100}(0.01) = \frac{\lg\left(10^{-2}\right)}{\lg(10^2)} = \frac{-2}{2} = \underline{\underline{-1}}$

Aufgabe 3

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $\log_3(x) = 5$ b) $\log_8(x) = \frac{2}{3}$ c) $\log_x(125) = 3$

d) $3\log_a(x) = 2\log_a(8)$ e) $\lg(9x+5) - \lg(x) = 1$ f) $\log_{0.01}(x) = \frac{1}{2}$

Lösungen

a) $\log_3(x) = 5$ | auf beiden Seiten "Logarithmenbasis 3 hoch ..." rechnen, denn es gilt

$$x \underset{\text{Umkehrfunktion "3 hoch ..."}}{\overset{\log_3}{\rightleftarrows}} \log_3(x)$$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 3^5}}$ Folgt somit direkt aus der Definition von $\log_3(x)$

b) $\log_8(x) = \frac{2}{3}$ | auf beiden Seiten "8 hoch ..."

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = 8^{\frac{2}{3}} = \left(8^{\frac{1}{3}}\right)^2 = 2^2 = \underline{\underline{4}}$ Folgt auch direkt aus der Definition von $\log_8(x)$

c) $\log_x(125) = 3$ | auf beiden Seiten "x hoch ..."

$\Leftrightarrow 125 = x^3$ Folgt auch direkt aus der Definition von $\log_x(125)$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 5}}$

d) $3\log_a(x) = 2\log_a(8) \Leftrightarrow \log_a\left(x^3\right) = \log_a(8^2) \Leftrightarrow x^3 = 64 \Leftrightarrow \underline{\underline{x = 4}}$

e) $\lg(9x+5) - \lg(x) = 1$

$\Leftrightarrow \lg\left(\frac{9x+5}{x}\right) = 1 \overset{\text{und}}{\wedge} 9x+5 > 0 \wedge x > 0$ | auf beiden Seiten der Gleichung "10 hoch ..."

$\Leftrightarrow \frac{9x+5}{x} = 10^1 \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow 9x+5 = 10x \wedge x > 0$

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x = 5}}$

f) $\log_{0.01}(x) = \frac{1}{2}$ | auf beiden Seiten "0.01 hoch ..."

$\Leftrightarrow \underline{\underline{x}} = 0.01^{\frac{1}{2}} = \left(10^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} = 10^{-1} = \underline{\underline{0.1}}$ Folgt auch direkt aus der Definition von $\log_{0.01}(x)$

Aufgabe 4

Lösen Sie die folgenden Gleichungen:

a) $\left(3^{x-1}\right)^3 = 9\cdot 3^{x-2}$

b) $\log_2(x) = \frac{1}{2}+\log_4(4x+15)$

c) $e^x - 6e^{-x} = -1$

d) $2\cdot 2^{6x-1} - 3\cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$

e) $3^x + 9^x = 90$

f) $\lg(x+2) - \lg(3) = \lg(2x-1) + \lg(7)$

Lösungen

a) $\left(3^{x-1}\right)^3 = 9\cdot 3^{x-2}$

$\Leftrightarrow \quad 3^{3x-3} = 3^2\cdot 3^x\cdot 3^{-2}$

$\Leftrightarrow \quad 3^{3x-3} = 3^x \quad \Big| \; :3^x \;\; (\neq 0)$

$\Leftrightarrow \quad 3^{2x-3} = 1 = 3^0$

$\Leftrightarrow \quad 2x-3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{3}{2}}}$

b) $\log_2(x) = \frac{1}{2}+\log_4(4x+15)$ Wir drücken $\log_2$ und $\log_4$ mit Hilfe von nur noch einer Logarithmusfunktion aus, z.B. mit ln

$\Leftrightarrow \quad \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = \frac{1}{2}+\frac{\ln(4x+15)}{\ln(4)} \quad \Big| \; \cdot 2\ln(2) \qquad \left[\ln(4) = \ln(2^2) = 2\ln(2)\right]$

$\Leftrightarrow \quad 2\ln(x) = \ln(2) + \ln(4x+15)$

$\Leftrightarrow \quad \ln(x^2) = \ln(8x+30) \wedge x>0 \quad \Big|$ auf beiden Seiten "e hoch ..." bzw. "exp(...)"

$\Leftrightarrow \quad x^2 = 8x+30 \wedge x>0 \wedge 8x+10>0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 - 8x - 30 = 0 \wedge x>0$

$\Leftrightarrow \quad x = \dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \dfrac{8\pm\sqrt{64+120}}{2} = \dfrac{8\pm\sqrt{184}}{2} = \dfrac{8\pm\sqrt{4\cdot 46}}{2} = 4\pm\sqrt{46} \wedge x>0$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 4+\sqrt{46}}}$

c) $e^x - 6e^{-x} = -1 \quad \Big|$ Multiplikation mit e^x führt auf eine quadratische Gleichung für e^x

$\Leftrightarrow \quad (e^x)^2 - 6 = -e^x \quad \Leftrightarrow \quad (e^x)^2 + e^x - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (e^x+3)(e^x-2) = 0$

$\Leftrightarrow \quad e^x = -3$ (unmöglich) $\overset{\text{oder}}{\vee} \; e^x = 2 \quad \Big|$ auf beiden Seiten "ln(...)" , denn es gilt

$$x \underset{\text{Umkehrfunktion } \ln(\ldots)}{\overset{\exp = e^{\cdots}}{\rightleftarrows}} e^x$$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \ln(2)}}$

d) $2 \cdot 2^{6x-1} - 3 \cdot 2^{3x+1} + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2 \cdot \left(2^{3x}\right)^2 \cdot 2^{-1} - 3 \cdot 2^{3x} \cdot 2^1 + 9 = 0$ quadratische Gleichung für 2^{3x}

$\Leftrightarrow \quad \left(2^{3x}\right)^2 - 6 \cdot 2^{3x} + 9 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(2^{3x} - 3\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{3x} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(2^{3x}\right) = \ln(3)$

$\Leftrightarrow \quad 3x \cdot \ln(2) = \ln(3) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{\ln(3)}{3\ln(2)}}}$

e) $3^x + 9^x = 90$ Logarithmieren hilft hier nicht weiter, denn auf der linken Seite der Gleichung erhält man den Logarithmus einer Summe, und dafür gibt es keinen Satz!

Hier muss man den speziellen Zusammenhang zwischen 3^x und 9^x erkennen:

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$

$\Leftrightarrow \quad 3^x + \left(3^x\right)^2 = 90$ quadratische Gleichung für 3^x

$\Leftrightarrow \quad \left(3^x\right)^2 + 3^x - 90 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (3^x + 10)(3^x - 9) = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3^x = -10$ (unmöglich) $\vee \; 3^x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = 2}}$

Hier war $x = 2$ leicht zu erkennen. Natürlich hätte auch Logarithmieren zum Ziel geführt:

$3^x = 9 \quad \Leftrightarrow \quad \ln(3^x) = \ln(9) \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot \ln(3) = \ln(3^2) \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x}} = \frac{2\ln(3)}{\ln(3)} = \underline{\underline{2}}$

f) $\lg(x+2) - \lg(3) = \lg(2x-1) + \lg(7)$

$\Leftrightarrow \quad \lg(x+2) = \lg(2x-1) + \lg(7) + \lg(3)$

$\Leftrightarrow \quad \lg(x+2) = \lg\left((2x-1) \cdot 7 \cdot 3\right)$

$\Leftrightarrow \quad x+2 = 21(2x-1) \;\wedge\; x+2 > 0 \;\wedge\; 2x-1 > 0$

$\Leftrightarrow \quad x+2 = 42x - 21 \;\wedge\; x > -2 \;\wedge\; x > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 23 = 41x \;\wedge\; x > \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = \frac{23}{41}}}$

Aufgabe 5

Die Anzahl Bakterien einer Bakterienkolonie wächst exponentiell und verdoppelt sich alle 10 Minuten.

a) Zum Zeitpunkt $t = 0$ Minuten sind 100 Bakterien vorhanden. Wie viele Bakterien hat es zu irgendeinem Zeitpunkt t Minuten?

b) Berechnen Sie die Populationsgrösse nach 10 und 60 Minuten.

c) Wann ist die Marke von 10^6 Bakterien erreicht?

d) Um wie viel Prozent nimmt die Bakterienzahl jeweils in 3 Minuten zu?
[Für die Teilaufgabe c) den Rechner benützen.]

Lösung

a) Jede Grösse (Zahl), die in Abhängigkeit einer Zahl t exponentiell wächst, hat die Gestalt $f(t) = a \cdot b^t$. Im vorliegenden Fall gilt

$f(t) = a \cdot b^t$ = Anzahl Bakterien zur Zeit t Minuten, wobei es zur Zeit $t = 0$ Minuten 100 Bakterien hat. D.h. es gilt $f(0) = a \cdot b^0 = \underline{a = 100}$

Bekanntlich zeichnet sich exponentielles Wachstum oder exponentielle Abnahme dadurch aus, dass der Funktionswert $f(t) = a \cdot b^t$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t in der nachfolgenden Zeitspanne Δt stets mit dem Faktor $b^{\Delta t}$ multipliziert wird. Begründung:

$$\underline{f(t+\Delta t)} = a \cdot b^{t+\Delta t} = \underbrace{a \cdot b^t}_{f(t)} \cdot b^{\Delta t} = \underline{f(t) \cdot b^{\Delta t}}$$

In unserem Fall verdoppelt sich die Bakterienzahl alle 10 Minuten und somit findet alle 10 Minuten eine Multiplikation mit dem Faktor $b^{10} = 2$ statt. Daraus erhält man $\underline{b = 2^{\frac{1}{10}}}$ und schliesslich

$$\underline{\underline{f(t) = 100 \cdot \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^t = 100 \cdot 2^{\frac{t}{10}}}}$$

Selbstverständlich könnte man die im obigen Ausdruck vorkommende Potenz $2^{\frac{t}{10}}$ wie jede positive Zahl als Potenz von e schreiben, was aber zur Lösung solcher Aufgaben nicht erforderlich ist:

$$\underline{2^{\frac{t}{10}}} = e^{\ln\left(2^{\frac{t}{10}}\right)} = \underline{e^{\frac{t}{10} \cdot \ln(2)} = e^{\frac{\ln(2)}{10} \cdot t}}$$

b) $\underline{\underline{f(10)}} = 100 \cdot 2^{\frac{10}{10}} = \underline{\underline{200}}$, $\underline{\underline{f(60)}} = 100 \cdot 2^{\frac{60}{10}} = \underline{\underline{6400}}$

c) $f(t) = 100 \cdot 2^{\frac{t}{10}} = 10^6 \Rightarrow$

$2^{\frac{t}{10}} = 10^4 \Leftrightarrow \lg\left(2^{\frac{t}{10}}\right) = \lg(10^4) \Leftrightarrow \frac{t}{10} \cdot \lg(2) = 4 \Leftrightarrow \underline{\underline{t = \frac{40}{\lg(2)}}}$

d) In der Zeitspanne 3 Minuten wird die Bakterienzahl jeweils mit folgendem Faktor multipliziert:

$$\underline{b^3} = \left(2^{\frac{1}{10}}\right)^3 = 2^{0.3} = \underline{1.231 = 1 + \tfrac{23.1}{100}}$$

Multiplikation mit dem Faktor $1 + \frac{23.1}{100}$ bedeutet aber Zunahme um 23.1 %.
Also: die Bakterienzahl nimmt jeweils innert 3 Minuten um $\underline{\underline{23.1\ \%}}$ zu.

Beachte: exponentielles Wachstum oder exponentielle Abnahme zeichnet sich auch dadurch aus, dass der Funktionswert $f(t) = a \cdot b^t$ zu einem beliebigen Zeitpunkt t in einer fest vorgegebenen Zeitspanne Δt stets um gleich viel Prozent zu- oder abnimmt. Dabei gilt:

- Multiplikation mit dem Faktor $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ bedeutet Zunahme um p %
- Multiplikation mit dem Faktor $\left(1 - \frac{p}{100}\right)$ bedeutet Abnahme um p %

Aufgabe 6

Ein Kapital der Höhe C wird auf einer Bank deponiert. Jedes Jahr wächst das Kapital durch Zinszuschuss um 2 %.

a) Wie gross ist das Kapital nach t Jahren?

b) In wie vielen Jahren verdoppelt sich jeweils das Kapital?

c) Um wie viel Prozent wächst das Kapital jeweils in 5 Jahren?
[Für die Teilaufgabe c) den Rechner benützen.]

Lösung

Vorbemerkung:

- Zunahme um p % bedeutet Multiplikation mit dem Faktor $\left(1+\frac{p}{100}\right)$
- Bei jährlicher Zunahme um p % wird innert t Jahren mit dem Faktor $\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$ multipliziert.

Aus diesem Grund wird aus dem Anfangskapital C in t Jahren das Kapital $\underline{K(t) = C\cdot\left(1+\frac{p}{100}\right)^t}$.

[Beachte: die unterstrichene Zinseszinsformel braucht man nicht zu lernen, denn sie lässt sich jederzeit notieren, wenn man verstanden hat, was eine jährliche Zunahme um p % bedeutet.]

a) Kapital nach t Jahren: $\underline{\underline{K(t) = C\cdot\left(1+\frac{2}{100}\right)^t = C\cdot 1.02^t}}$

b) In t Jahren wird das Kapital jeweils mit dem Faktor 1.02^t multipliziert. Gesucht ist t so, dass dieser Faktor gleich 2 ist:

$$1.02^t = 2 \iff \ln\left(1.02^t\right) = \ln(2) \iff t\cdot\ln(1.02) = \ln(2) \iff \underline{\underline{t = \frac{\ln(2)}{\ln(1.02)}}}$$

c) In 5 Jahren findet jeweils eine Multiplikation mit dem Faktor $1.02^5 = 1.104 = 1+\frac{10.4}{100}$ statt.
Multiplikation mit dem Faktor $\left(1+\frac{10.4}{100}\right)$ bedeutet aber Zunahme um $\underline{\underline{10.4\ \%}}$.