GMFH - Gesellschaft für Mathematik an Schweizer Fachhochschulen
SMHES - Société pour les Mathématiques dans les Hautes Ecoles Spécialisées suisses

Mathematik-Referenzaufgaben zum Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität (RLP-BM 2012)

Grundsatzfrage 6

- … elementare trigonometrische Funktionsbeziehungen bestimmen (trigonometrischer Pythagoras, Periodizität, Symmetrien …).

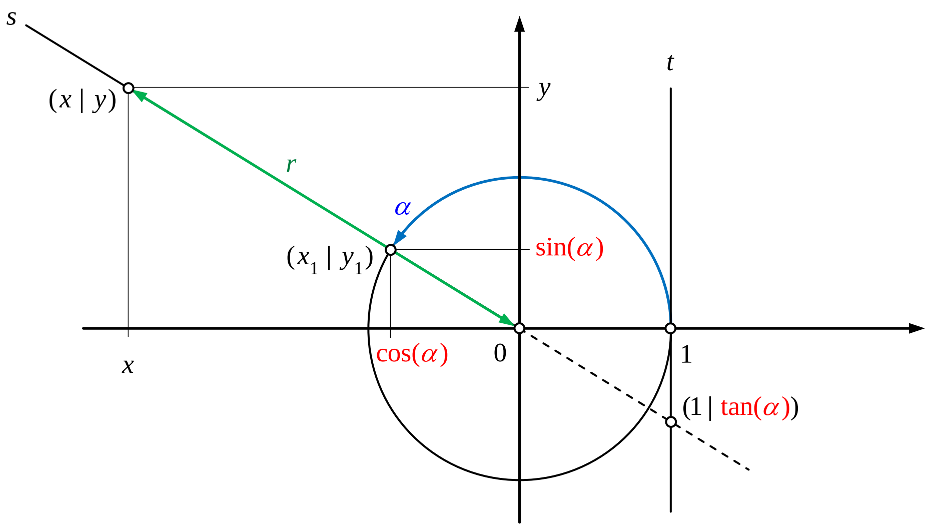
- … die Arkusfunktionen als Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen (mit eingeschränktem Definitionsbereich) interpretieren und grafisch visualisieren (auch ohne Hilfsmittel).

- … elementare trigonometrische Gleichungen am Einheitskreis visualisieren und mithilfe der Arkusfunktionen lösen.

Hannes Böhi (HSR Rapperswil)

Vorbemerkung zu den Aufgaben 1 bis 8

Wie sind die trigonometrischen Funktionswerte eines beliebigen Winkels α definiert und wie lassen sich diese Funktionswerte aus einer Einheitskreis-Figur ablesen?



- Zuerst wird der Winkel α von der positiven Abszissenachse aus abgetragen (positive Winkel im Gegenuhrzeigersinn, negative Winkel im Uhrzeigersinn)
- Auf diese Weise gehört zu jedem Winkel α ein vom Ursprung ausgehender Strahl s.
- $(x \mid y)$ sei ein beliebiger Punkt auf dem zu α gehörenden Strahl s und r der Abstand dieses Punktes vom Nullpunkt.
- $(x_1 \mid y_1)$ sei der zum Winkel α gehörige Punkt auf dem Einheitskreis (= Schnittpunkt des Strahls s mit dem Einheitskreis).

Dann gilt:

$$\sin(\alpha) \overset{\text{Definition}}{=} \frac{y}{r} = \frac{\text{Ordinate eines beliebigen Punktes auf } s}{\text{Nullpunktsabstand dieses Punktes}} \overset{\text{Strahlensatz}}{=} \frac{y_1}{1} = y_1$$
$$= \text{Ordinate des zu } \alpha \text{ gehörenden Punktes auf dem Einheitskreis}$$

$$\cos(\alpha) \overset{\text{Definition}}{=} \frac{x}{r} = \frac{\text{Abszisse eines beliebigen Punktes auf } s}{\text{Nullpunktsabstand dieses Punktes}} \overset{\text{Strahlensatz}}{=} \frac{x_1}{1} = x_1$$
$$= \text{Abszisse des zu } \alpha \text{ gehörenden Punktes auf dem Einheitskreis}$$

$$\tan(\alpha) \overset{\text{Definition}}{=} \frac{y}{x} = \frac{\text{Ordinate eines beliebigen Punktes auf } s}{\text{Abszisse dieses Punktes}} \overset{\text{Erweitern mit } \frac{1}{r}}{=} \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

t sei die Tangente an den Einheitskreis im Punkt $(1 \mid 0)$.
Dann lässt sich $\tan(\alpha)$ wie folgt aus der obigen Figur herauslesen:

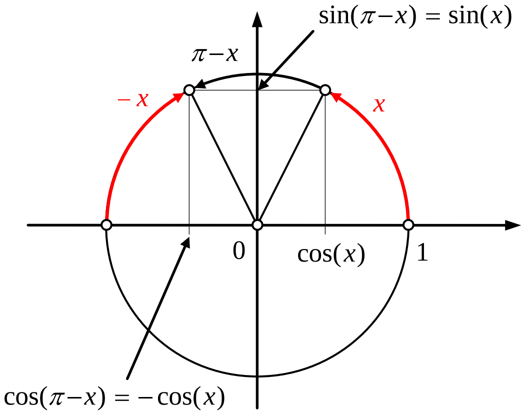
Der Strahl s oder die den Strahl s enthaltende Gerade schneidet t im Punkt $\left(1 \mid \tan(\alpha)\right)$.

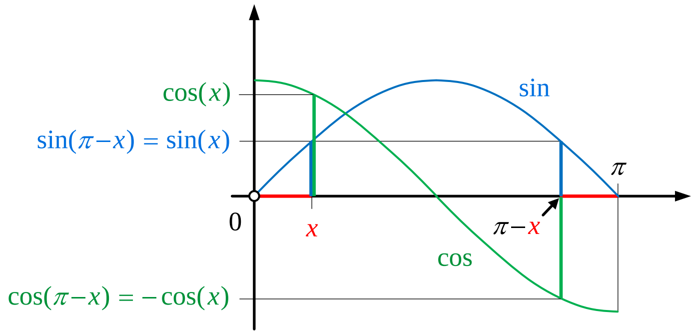
Aufgabe 1 (Aufgabe zu den Quadrantenbeziehungen der trigonometrischen Funktionen)

a) Vereinfachen Sie: $\sin(x)+\sin(\pi-x)+\cos(x)+\cos(\pi-x)$

Lösung: $\sin(x)+\underbrace{\sin(\pi-x)}_{\sin(x)}+\cos(x)+\underbrace{\cos(\pi-x)}_{-\cos(x)} = \underline{\underline{2\sin(x)}}$

Die im obigen Lösungsweg benützten Quadrantenbeziehungen lassen sich sowohl aus einer Einheitskreisfigur als auch aus den Graphen von sin und cos herauslesen:

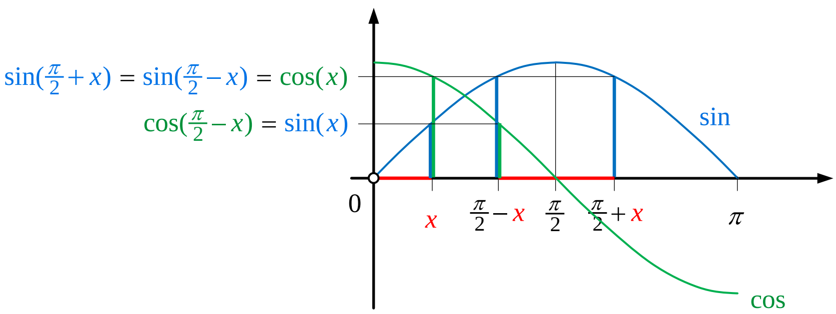




b) Vereinfachen Sie: $\sin(x)-\cos(\frac{\pi}{2}-x)+\sin(\frac{\pi}{2}-x)+\cos(x)+\sin(\frac{\pi}{2}+x)$

Lösung: $\sin(x)-\underbrace{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}_{\sin(x)}+\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}-x)}_{\cos(x)}+\cos(x)+\underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}_{\cos(x)} = \underline{\underline{3\cos(x)}}$

Die im obigen Lösungsweg benützten Quadrantenbeziehungen lassen sich am einfachsten aus den Graphen von sin und cos herauslesen:



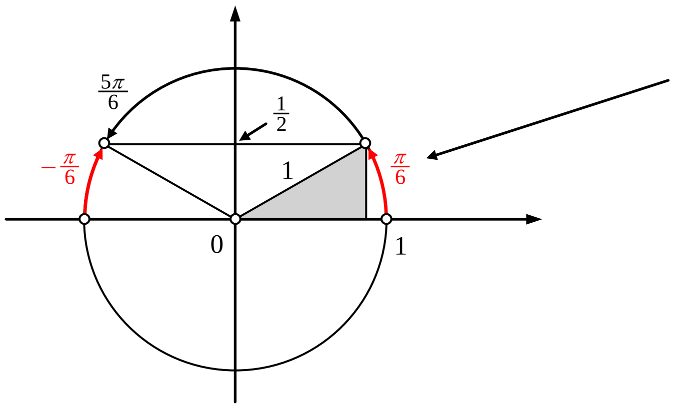
Aufgabe 2

Bestimmen Sie das Bogenmass aller Winkel $x \in [0\,;\,2\pi[$, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sin\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right) \;=\; \tfrac{1}{2}$$

Lösung

Der Sinus eines Winkels ist die Ordinate (=2. Koordinate) des zum Winkel gehörenden Punktes auf dem Einheitskreis. Es gibt zwei Punkte auf dem Einheitskreis mit der Ordinate $\tfrac{1}{2}$ und somit zweimal unendlich viele Winkel mit dem Sinuswert $\tfrac{1}{2}$:



Dieser Winkel ist $\tfrac{\pi}{6}$ $(=30°)$, denn die kleine Kathete des schattierten Dreiecks ist halb so gross wie seine Hypotenuse. Damit ist das schattierte Dreieck ein halbes gleichseitiges Dreieck, also ein $30°/\,60°-$Dreieck.

$$\sin\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right) \;=\; \tfrac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad 2x+\tfrac{\pi}{3} \;=\; \tfrac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \;\;\overset{\overset{\text{oder}}{\downarrow}}{\vee}\;\; 2x+\tfrac{\pi}{3} \;=\; \pi-\tfrac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\;\text{ wobei }\; k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow\quad 2x \;=\; \tfrac{\pi}{6}-\tfrac{2\pi}{6}+k\cdot 2\pi \;\vee\; 2x \;=\; \tfrac{5\pi}{6}-\tfrac{2\pi}{6}+k\cdot 2\pi,\;\; k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow\quad 2x \;=\; -\tfrac{\pi}{6}+k\cdot 2\pi \;\vee\; 2x \;=\; \tfrac{\pi}{2}+k\cdot 2\pi,\;\; k\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow\quad \underline{x \;=\; -\tfrac{\pi}{12}+k\cdot \pi \;\vee\; x \;=\; \tfrac{\pi}{4}+k\cdot \pi,\;\; k\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}$$

Gesucht sind in dieser Aufgabe nur die Winkel x aus dem Intervall $[0\,;\,2\pi[$, also

$$\underline{\underline{x\in\left\{\tfrac{11\pi}{12}\,,\,\tfrac{23\pi}{12}\,,\,\tfrac{\pi}{4}\,,\,\tfrac{5\pi}{4}\right\}}}$$

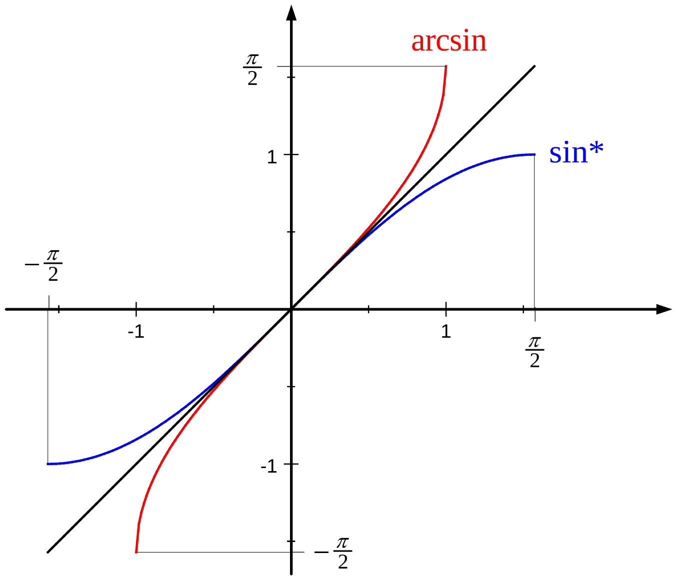
Zwei Bemerkungen:

- Es gibt 2 Winkel im Intervall $[0\,;\,2\pi[$ mit dem Sinuswert $\tfrac{1}{2}$. Zusammen mit der 2 in der Bedingung $\sin\left(2x+\tfrac{\pi}{3}\right) \;=\; \tfrac{1}{2}$ erhält man daher $2\cdot 2 = 4$ Winkel im Intervall $[0\,;\,2\pi[$.
- Der rote Winkel $\tfrac{\pi}{6}$ in der obigen Figur ist übrigens $\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right)$. Er kann hier bestimmt werden, ohne dass man die Funktion arcsin bzw. $\sin^{-1}$ benützt. In den folgenden Aufgaben 3, 5 und 7 ist man aber auf die Arkusfunktionen angewiesen, weshalb diese hier kurz erklärt seien.

Definition der Arkusfunktionen

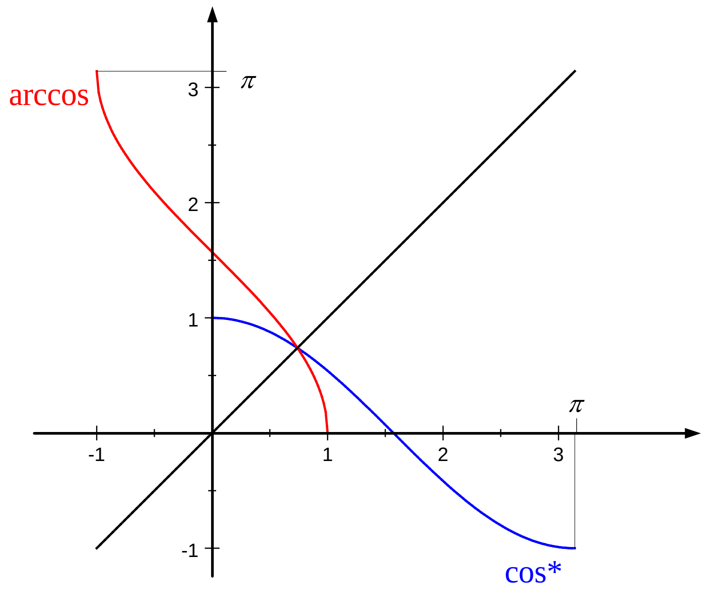
arcsin ist die Umkehrfunktion von sin*, wobei sin* nur auf dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ definiert ist und dort mit der Sinusfunktion übereinstimmt.

arcsin liefert zu einem gegebenen Sinuswert stets nur einen Winkel aus dem Intervall $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.



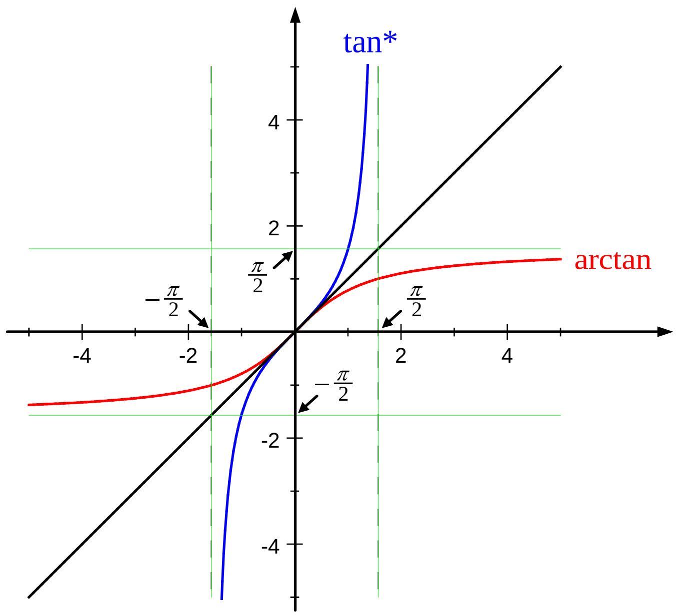
arccos ist die Umkehrfunktion von cos*, wobei cos* nur auf dem Intervall $[\,0, \pi\,]$ definiert ist und dort mit der Cosinusfunktion übereinstimmt.

arccos liefert zu einem gegebenen Cosinuswert stets nur einen Winkel aus dem Intervall $[\,0, \pi\,]$.



arctan ist die Umkehrfunktion von tan*, wobei tan* nur auf dem Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ definiert ist und dort mit der Tangensfunktion übereinstimmt.

arctan liefert zu einem gegebenen Tangenswert stets nur einen Winkel aus dem offenen Intervall $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

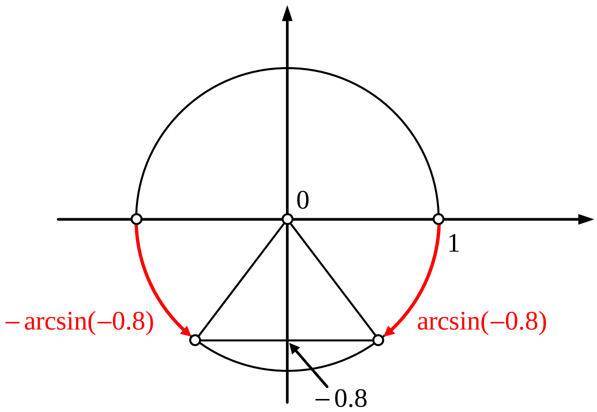


Aufgabe 3

Bestimmen Sie das Bogenmass aller Winkel x, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$\sin\left(7x-1\right) \;=\; -0.8$$

Lösung



$$\sin\left(7x-1\right) \;=\; -0.8$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x-1 \;=\; \arcsin(-0.8)+k\cdot 2\pi \;\vee\; 7x-1 \;=\; \pi-\arcsin(-0.8)+k\cdot 2\pi, \;\text{ wobei } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 7x \;=\; 1+\arcsin(-0.8)+k\cdot 2\pi \;\vee\; 7x \;=\; 1+\pi-\arcsin(-0.8)+k\cdot 2\pi, \;k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x \;=\; \tfrac{1+\arcsin(-0.8)}{7}+k\cdot\tfrac{2\pi}{7} \;\vee\; x \;=\; \tfrac{1+\pi-\arcsin(-0.8)}{7}+k\cdot\tfrac{2\pi}{7}, \;k\in\mathbb{Z}}}$$

Aufgabe 4.a)

Bestimmen Sie das Bogenmass aller Winkel $x\in\left[0\,;\,2\pi\right[$, welche die folgende Gleichung erfüllen:

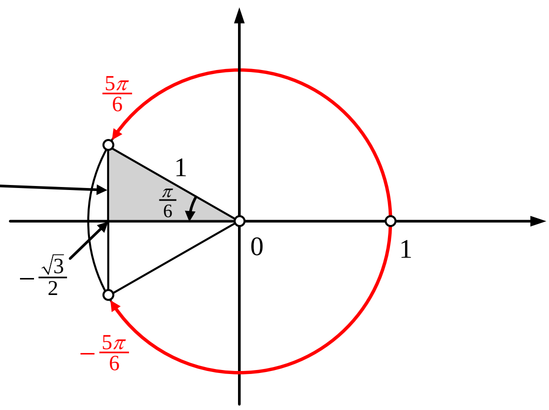
$$\cos(5x) \;=\; -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

Lösung

Nach Pythagoras:

$$\sqrt{1-\tfrac{3}{4}} = \sqrt{\tfrac{1}{4}} = \tfrac{1}{2}$$

Also 30° / 60° – Dreieck, da Hypotenuse doppelt so gross wie kleine Kathete



$$\cos(5x) \;=\; -\tfrac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x \;=\; \tfrac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi \;\vee\; 5x \;=\; -\tfrac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi, \;\text{ wobei } k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 5x \;=\; \pm\tfrac{5\pi}{6}+k\cdot 2\pi, \;k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x \;=\; \pm\tfrac{\pi}{6}+k\cdot\tfrac{2\pi}{5}\;\left[=\;\pm\tfrac{5\pi}{30}+k\cdot\tfrac{12\pi}{30}\right]}, \;k\in\mathbb{Z}$$

Gesucht: $\underline{\underline{x\in\left\{\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{17\pi}{30}, \tfrac{29\pi}{30}, \tfrac{41\pi}{30}, \tfrac{53\pi}{30}, \tfrac{7\pi}{30}, \tfrac{19\pi}{30}, \tfrac{31\pi}{30}, \tfrac{43\pi}{30}, \tfrac{11\pi}{6}\right\}}}$

Bemerkung: Es gibt 2 Winkel im Intervall $[0\,;2\pi[$ mit dem Cosinuswert $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. Zusammen mit der 5 in der Bedingung $\cos(5x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ erhält man daher $2 \cdot 5 = 10$ Winkel im Intervall $[0\,;2\pi[$.

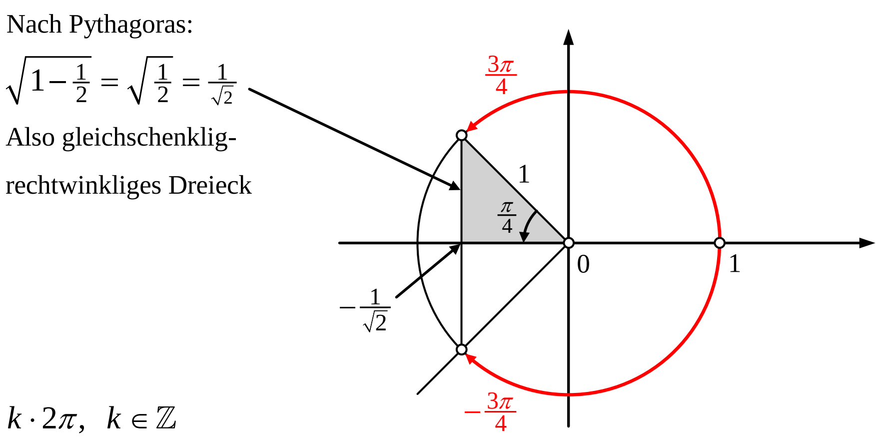
Aufgabe 4.b)

Bestimmen Sie das Bogenmass aller Winkel α, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$\cos(3\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Lösung

$$\cos(3\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \left[= -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -\frac{1.4}{2} = -0.7 : \text{für die Skizze} \right]$$



$$\cos(3\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\alpha = \pm\frac{3\pi}{4} + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

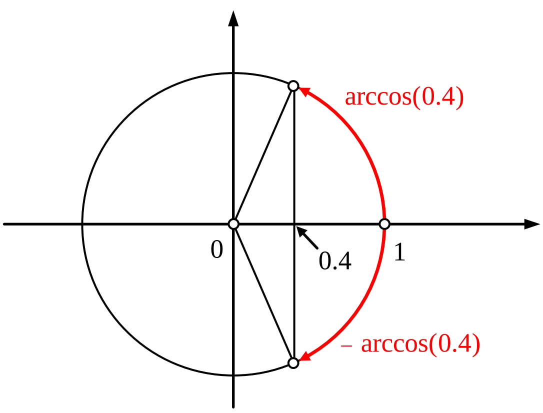
$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{\alpha = \pm\frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{2\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}}}$$

Aufgabe 5

Bestimmen Sie das Bogenmass aller Winkel x, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$\cos(4x+4) = 0.4$$

Lösung



$$\cos(4x+4) = 0.4$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x+4 = \pm\arccos(0.4) + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x = -4 \pm \arccos(0.4) + k \cdot 2\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\underline{x = -1 \pm \frac{1}{4} \cdot \arccos(0.4) + k \cdot \frac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}}}$$

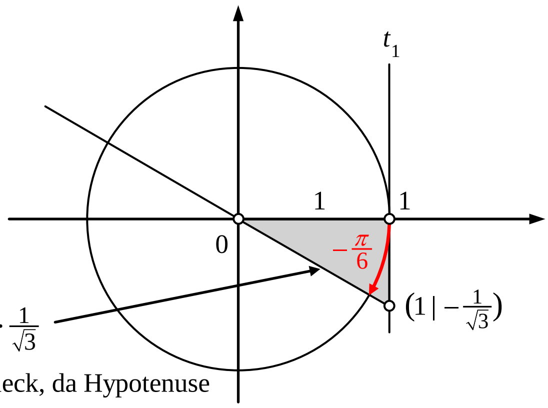
Aufgabe 6

Bestimmen Sie das Bogenmass aller Winkel $\beta \in [0\,;\,2\pi[$, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$\tan(3\beta) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

Lösung

$$\tan(3\beta) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}} \quad \left[= -\tfrac{\sqrt{3}}{3} \approx -\tfrac{1.7}{3} \approx -0.6 : \text{ für die Skizze}\right]$$



Nach Pythagoras:

$$\sqrt{1+\tfrac{1}{3}} = \sqrt{\tfrac{4}{3}} = 2 \cdot \tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

Also 30° / 60° – Dreieck, da Hypotenuse doppelt so gross wie kleine Kathete

$$\tan(3\beta) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad 3\beta = -\tfrac{\pi}{6} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{\beta = -\tfrac{\pi}{18} + k\tfrac{\pi}{3} \left[= -\tfrac{\pi}{18} + k\tfrac{6\pi}{18}\right], \quad k \in \mathbb{Z}}$$

Gesucht: $\underline{\underline{\beta \in \left\{\tfrac{5\pi}{18}, \tfrac{11\pi}{18}, \tfrac{17\pi}{18}, \tfrac{23\pi}{18}, \tfrac{29\pi}{18}, \tfrac{35\pi}{18}\right\}}}$

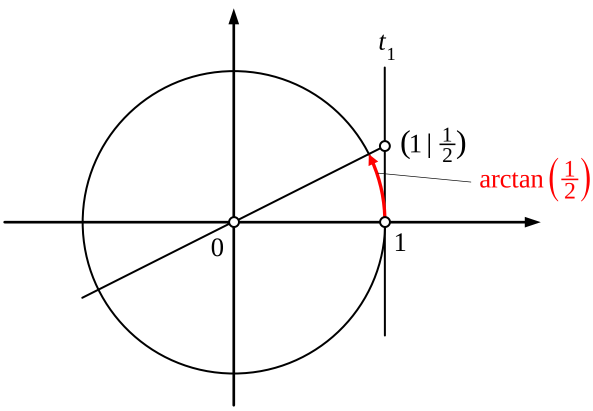
Bemerkung: Es gibt 2 Winkel im Intervall $[0\,;\,2\pi[$ mit dem Tangenswert $-\tfrac{1}{\sqrt{3}}$. Zusammen mit der 3 in der Bedingung $\tan(3\beta) = -\tfrac{1}{\sqrt{3}}$ erhält man daher $2 \cdot 3 = 6$ Winkel im Intervall $[0\,;\,2\pi[$.

Aufgabe 7

Bestimmen Sie das Bogenmass aller Winkel γ, welche die folgende Gleichung erfüllen:

$$\tan(8\gamma) = \tfrac{1}{2}$$

Lösung



$\tan(8\gamma) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \quad 8\gamma = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad \underline{\gamma = \frac{1}{8}\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + k\frac{\pi}{8}, \quad k \in \mathbb{Z}}$

Aufgabe 8 (Aufgabe zum trigonometrischen Pythagoras-Satz)

Vereinfachen Sie: a) $1 + \tan^2(\alpha) + \dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$

b) $\dfrac{1}{\cos(x)} - \sin(x)\tan(x)$

Lösung

a) $$1 + \tan^2(\alpha) + \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \frac{\sin^2(\alpha)}{\cos^2(\alpha)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \frac{\overbrace{\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha)}^{1}}{\cos^2(\alpha)} + \frac{1}{\cos^2(\alpha)} = \underline{\underline{\frac{2}{\cos^2(\alpha)}}}$$

b) $$\frac{1}{\cos(x)} - \sin(x)\tan(x) = \frac{1}{\cos(x)} - \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)} = \frac{\overbrace{1 - \sin^2(x)}^{\cos^2(x)}}{\cos(x)} = \underline{\underline{\cos(x)}}$$