GMFH - Gesellschaft für Mathematik an Schweizer Fachhochschulen
SMHES - Société pour les Mathématiques dans les Hautes Ecoles Spécialisées suisses

Mathematik-Referenzaufgaben zum Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität (RLP-BM 2012)

Grundsatzfrage 5

- … geometrische Sachverhalte von elementaren Objekten (Quadrat, Rechteck, allgemeine und spezielle Dreiecke, Parallelogramm, Rhombus, Trapez, Kreis) beschreiben.

- … deren Elemente (Höhen, Seiten- und Winkelhalbierende, Mittelsenkrechte, Mittellinie im Trapez, Sehne, Sekante, Tangente, Sektor, Segment, Winkel und Winkelmass) und Zusammenhänge (Umfang, Flächeninhalt, Abstand) berechnen.

- … die Ähnlichkeit für Berechnungen in der Ebene nutzen.

Stéphane Félix (BFH-TI Biel/Bienne)
Marcello Robbiani (ZHAW Winterthur)

Grundfrage 5: Geometrie

Stéphane Félix / Marcello Robbiani / Dezember 2013

Die folgenden Zeichnungen sind suggestiver Natur. Sie wiederspiegeln nur den qualitativen und nicht den quantitativen Sachverhalt der Aufgaben. Im Unterricht können sie durch Handskizzen ersetzt werden.

Elementargeometrische Aufgaben

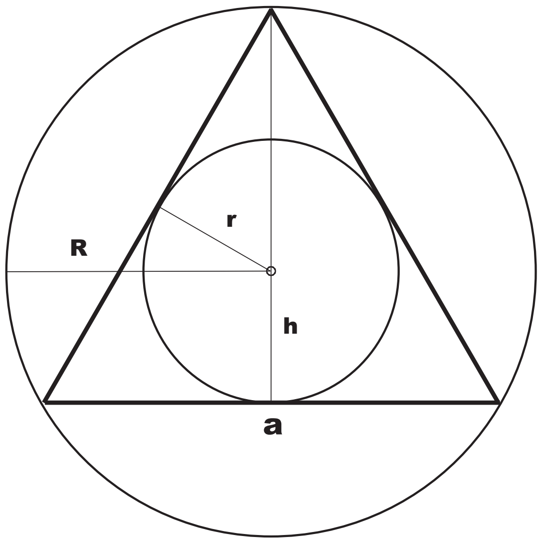
Im Folgenden wird der Stoff der Sekundarstufe I als gegeben vorausgesetzt.

Dies gilt insbesondere für die Satzgruppe des Pythagoras und deren Anwendungen.

Exemplarisch stehen hierfür folgende Aufgaben:

Aufgabe 1 *Dreiecksgeometrie*

Gegeben ist ein gleichseitiges Dreieck mit Seitenlänge $a = 10$.



a) Bestimmen Sie die Höhe h.

b) Bestimmen Sie den Inkreisradius r.

c) Bestimmen Sie den Umkreisradius R.

Lösung 1

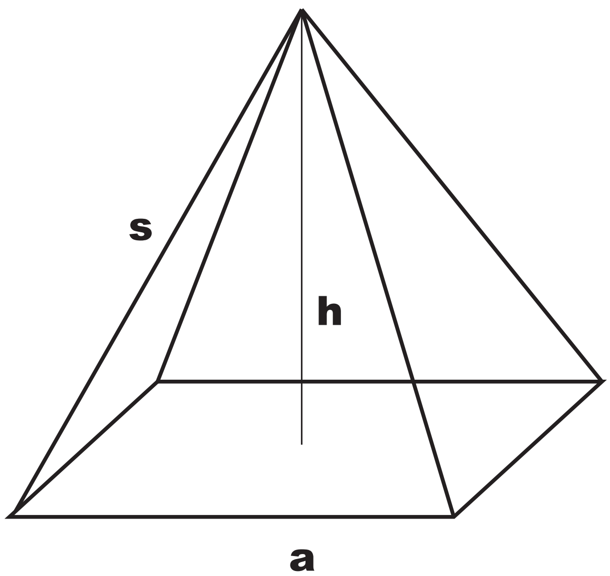
a) Es gilt: $h = \sqrt{10^2 - 5^2} = \sqrt{75} = 5 \cdot \sqrt{3}$.

b) & c) Es gilt: $R + r = 5 \cdot \sqrt{3}$ und $5^2 + r^2 = R^2$;

es folgt: $r = 5/\sqrt{3}$ und $R = 10/\sqrt{3}$.

Aufgabe 2 *Pyramidengeometrie*

Gegeben ist eine gerade quadratische Pyramide mit Seitenlänge $a = 6$ und Höhe $h = 8$.



a) Bestimmen Sie die Länge s der Steilkanten der Pyramide.

b) Bestimmen Sie den Inhalt M des Mantels und den Inhalt A Oberfläche der Pyramide.

c) Bestimmen Sie den Inhalt V des Volumens der Pyramide.

Lösung 2

a) Abstand Eckpunkt-Fusspunkt: $\sqrt{6^2 + 6^2}/2 = 3 \cdot \sqrt{2}$;

Abstand Eckpunkt-Spitze: $\sqrt{3^2 \cdot 2 + 8^2} = \sqrt{82}$.

b) Abstand Seitenmittelpunkt-Spitze: $\sqrt{3^2 + 8^2} = \sqrt{73}$.

Inhalt Seitenflächen: $3 \cdot \sqrt{73}$;

somit gilt: $M = 12 \cdot \sqrt{73}$.

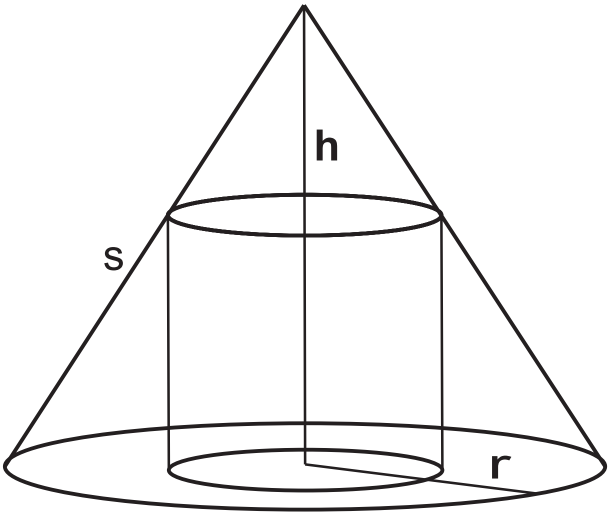
Inhalt Grundfläche: $G = 6^2$;

somit gilt: $A = 36 + 12 \cdot \sqrt{73}$.

c) Es gilt: $V = G \cdot h/3 = 36 \cdot 8/3 = 96$.

Aufgabe 3 *Zylinder- und Kegelgeometrie*

Einem geraden Kreiskegel mit Radius $r = 6$ und Höhe $h = 8$ wird ein gerader Kreiszylinder derselben Achse einbeschrieben.



a) Bestimmen Sie die Länge s einer Mantellinie des Kreiskegels.

b) Bestimmen Sie den Inhalt V des Volumens des Kreiskegels.

c) Bestimmen Sie den Inhalt M des Mantels des Kreiskegels.

d) Der Inhalt des Mantels des Kreiszylinders soll ein Drittel des Inhalts des Mantels des Kreiskegels betragen. Bestimmen Sie den Radius R und die Höhe H des Kreiszylinders.

Lösung 3

a) Es gilt: $s = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$.

b) Inhalt der Grundfläche des Kreiskegels: $G = \pi \cdot 6^2$;

es folgt: $V = \pi \cdot 36 \cdot 8/3 = \pi \cdot 96$.

c) Es gilt: $M = \pi \cdot 6 \cdot 10 = \pi \cdot 60$.

d) Es muss einerseits gelten: $2 \cdot \pi \cdot R \cdot H = \pi \cdot 20$;

es muss andererseits nach Strahlensatz gelten: $(8 - H)/R = 8/6$;

somit gilt $H = 8 - 8/6 \cdot R$;

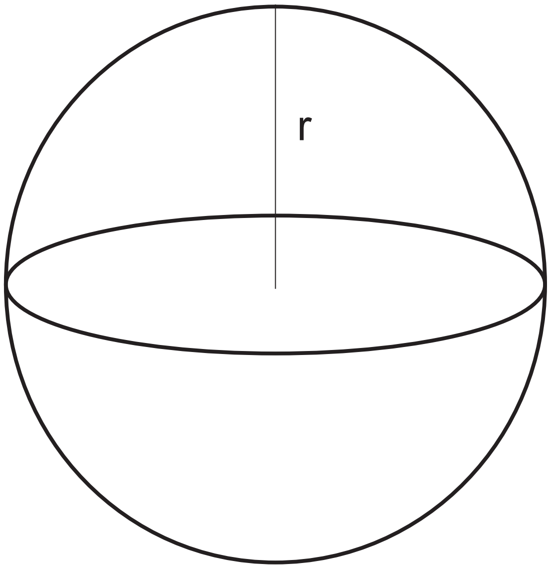
es folgt $R \cdot (8 - 8/6 \cdot R) = 10$;

somit gilt $8 \cdot R^2 - 48 \cdot R + 60 = 0$;

letzlich folgt entweder $R_1 = 4.2247$ und $H_1 = 2.3670$ oder $R_2 = 1.7753$ und $H_2 = 5.6330$.

Aufgabe 4 *Kugelgeometrie und Ähnlichkeit*

Eine Kugel mit Radius r hat den halben Volumeninhalt einer Kugel mit dem Radius R. Bestimmen Sie das Verhältnis der Oberflächeninhalte.



Lösung 4

Folgende zwei Lösungswege sind gleich wichtig:

a) Es gilt: $1/2 \cdot 4/3 \cdot \pi \cdot R^3 = 4/3 \cdot \pi \cdot r^3$;

es folgt: $R = \sqrt[3]{2} \cdot r$;

somit gilt: $(4 \cdot \pi \cdot R^2)/(4 \cdot \pi \cdot r^2) = \sqrt[3]{4}$.

b) Folgende Anordnung kann erreicht werden: die grosse Kugel geht aus der kleinen Kugel durch eine Streckung am gemeinsamen Zentrum um den Faktor λ hervor;

der Volumeninhalt nimmt dabei um den Faktor $\lambda^3 = 2$ zu;

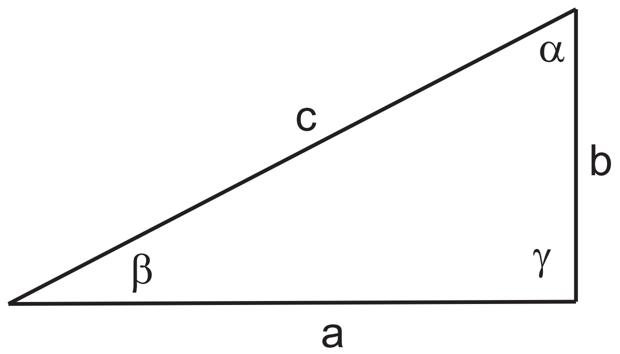
es folgt: $\lambda = \sqrt[3]{2}$;

der Oberflächeninhalt nimmt dabei um den den Faktor $\lambda^2 = \sqrt[3]{4}$ zu.

Trigonometrische Aufgaben: Rechtwinklige Dreiecke

Aufgabe 5 Grundaufgabe

Gegeben ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC. Die Hypotenuse sei c (und somit ist $\gamma = 90^o$).



a) Bestimmen Sie die Länge von b für $c = 10$ und $\beta = 17^o$.

b) Bestimmen Sie die Länge von c für $b = 10$ und $\beta = 17^o$.

c) Bestimmen Sie die Länge von a für $c = 10$ und $\beta = 17^o$.

d) Bestimmen Sie die Länge von c für $a = 10$ und $\beta = 17^o$.

e) Bestimmen Sie die Länge von b für $a = 10$ und $\beta = 17^o$.

f) Bestimmen Sie die Länge von a für $b = 10$ und $\beta = 17^o$.

Lösung 5

a) Es gilt: $b = 10 \cdot \sin(17^o)$.

b) Es gilt: $c = 10/\sin(17^o)$.

c) Es gilt: $a = 10 \cdot \cos(17^o)$.

d) Es gilt: $c = 10/\cos(17^o)$.

e) Es gilt: $b = 10 \cdot \tan(17^o)$.

f) Es gilt: $a = 10/\tan(17^o)$.

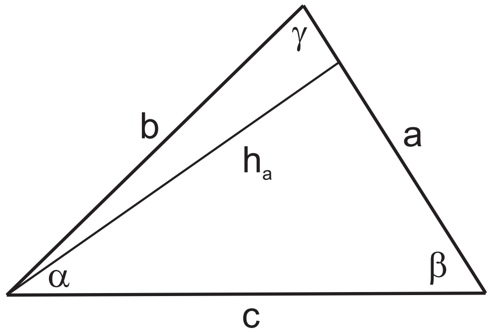
Elementare trigonometrische Aufgaben können benutzt werden, um fundamentale planimetrische und stereometrische Konzepte einzuführen oder zu wiederholen.

An sich ist die Zweiteilung in Planimetrie und Trigonometrie aus der Warte der Fachhochschulen ein stückweit künstlich, weil Studienanfänger typischerweise in der Mathematik, in der Physik und in den Ingenieurfächern mit Problemstellungen konfrontiert werden, welche Kompetenzen in beiden Lehrplanthemen gleichzeitig erfordern.

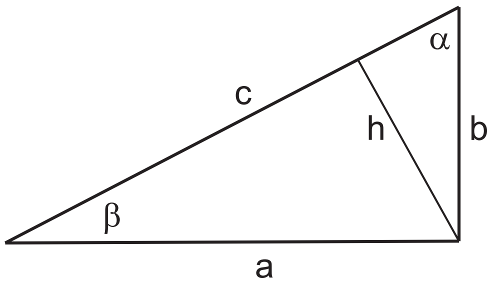
Die folgenden Aufgaben exemplifizieren diese Idee.

Aufgabe 6 *Dreiecks- und Vierecksgeometrie*

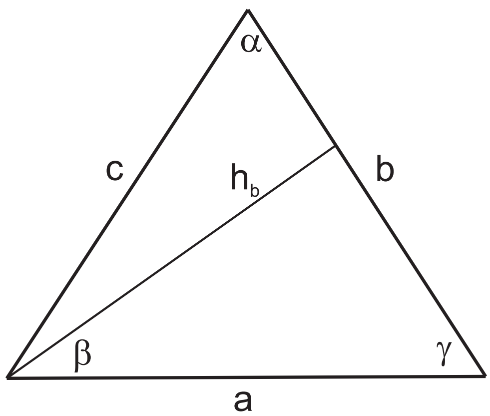
a) Von einem Dreieck sind die Seitenlängen $b = \sqrt{8}$ und $c = \sqrt{12}$, sowei die Höhe $h_a = \sqrt{6}$ bekannt. Bestimmen Sie den Winkel α.



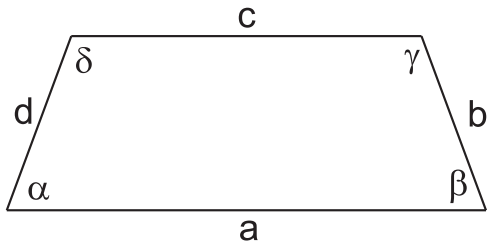
b) In einem rechtwinkligen Dreieck sind die Winkel $\alpha = 30^o$ und $\beta = 60^o$ bekannt. Bestimmen Sie das Verhältnis der Höhe h zur Hypotenuse c.



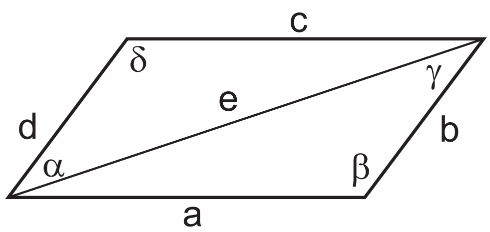
c) In einem gleichschenkligen Dreieck besitzen die Schenkel die Länge $b = c = \sqrt{5}$ und die Basis die Länge $a = \sqrt{15}$. Bestimmen Sie den Basiswinkel γ und die Höhe h_b.



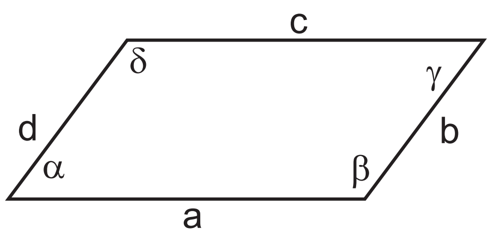
d) Ein gleichschenkligen Trapez besitzt zwei parallele Seiten der Länge $a = 30$ und $c = 20$ und Schenkel der Länge $b = d = 10$. Bestimmen Sie die Winkel im Trapez.



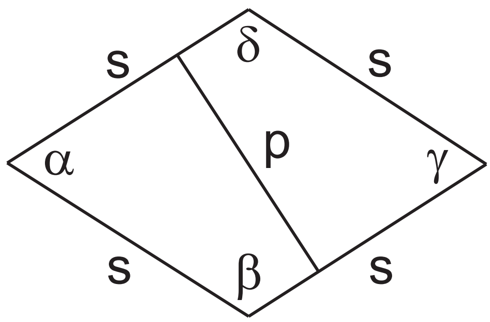
e) In einem Parallelogramm sind die Längen der Seiten $a = 3$, $b = 2$ und der Diagonalen $e = \sqrt{19}$ bekannt. Bestimmen Sie die Winkel im Parallelogramm.



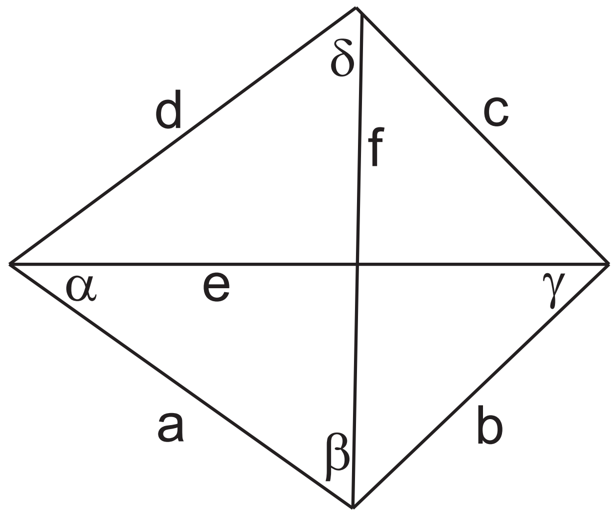
f) In einem Parallelogramm sind die Längen der Seiten $a = 3$, $b = 2$ und der Winkel $\alpha = \pi/4$ bekannt. Bestimmen Sie den Inhalt A der Fläche des Parallelogramms.



g) In einem Rhombus mit Seiten der Länge $s = 10$ beträgt der Abstand zweier paralleler Seiten $p = 5$. Bestimmen Sie die Winkel im Rhombus.



h) In einem Drachenviereck sind die Längen der Seiten $a = 6$, $b = 5$ und der Winkel $\alpha = \pi/3$ bekannt. Bestimmen Sie die Längen der Diagonalen des Drachenvierecks.



Lösung 6

a) Es gilt: $\alpha = \arccos(\sqrt{6}/\sqrt{12}) + \arccos(\sqrt{6}/\sqrt{8}) = \arccos(1/\sqrt{2}) + \arccos(\sqrt{3}/2)$;

somit gilt: $\alpha = 45^o + 30^o = 75^o$.

b) Es gilt: $h/c = \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) = 1/2 \cdot \sqrt{3}/2 = \sqrt{3}/4$.

c) Es gilt: $\gamma = \beta = \arccos(\sqrt{15/5}/2) = \arccos(\sqrt{3}/2) = 30^o$;

somit gilt: $h_b = \sin(30^o) \cdot \sqrt{15} = \sqrt{15}/2$.

d) Es gilt: $\alpha = \beta = \arccos((30 - 20)/2/10) = 60^o$ und $\gamma = \delta = 120^o$.

e) Es gilt: $e^2 = (b \cdot \sin(\alpha))^2 + (b \cdot \cos(\alpha) + a)^2$;

es folgt $\cos(\alpha) = \frac{e^2 - b^2 - a^2}{2 \cdot a \cdot b} = 1/2$;

somit gilt: $\alpha = \gamma = 60^o$ und $\beta = \delta = 120^o$.

f) Es gilt: $A = 3 \cdot 2 \cdot \sin(\pi/4) = 3 \cdot \sqrt{2}$.

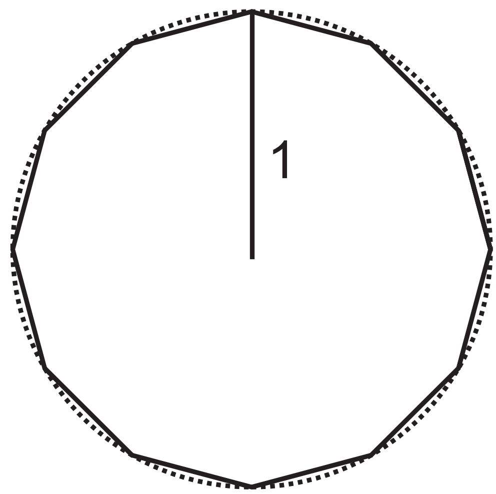
g) Es gilt: $\alpha = \gamma = \arcsin(1/2) = 30^o$ und $\beta = \delta = 150^o$.

h) Es gilt $f = 2 \cdot \sin(\pi/6) \cdot 6 = 6$;

es gilt: $e = \cos(\pi/6) \cdot 6 + \sqrt{5^2 - 3^2} = 3 \cdot \sqrt{3} + 4$.

Aufgabe 7 *Polygongeometrie*

Einem Einheitskreis wird ein reguläres Hunderteck einbeschrieben.



a) Bestimmen Sie den Umfang U des Hundertecks.

b) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A des Hundertecks.

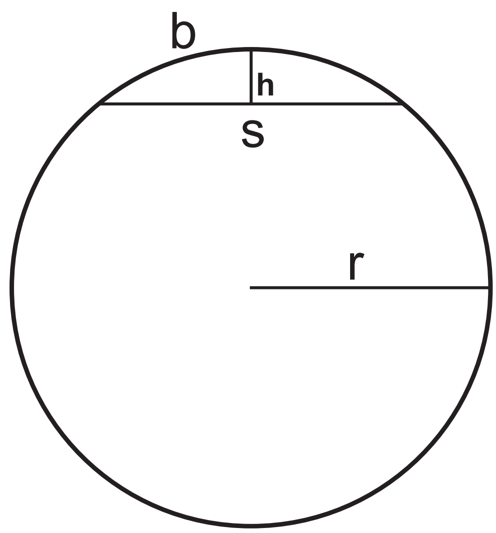
Lösung 7

a) Es gilt: $U = 200 \cdot \sin(1.8^o) = 6.2822$.

b) Es gilt: $A = 100 \cdot \sin(1.8^o) \cdot \cos(1.8^o) = 3.1395$.

Aufgabe 8 *Kreisgeometrie*

In einem Kreis mit Radius $r = 2$ ist ein Segment der Höhe $h = 0.5$ gegeben.



a) Bestimmen Sie die Länge s der entsprechenden Kreissehne.

b) Bestimmen Sie die Länge b des entsprechenden Kreisbogens.

c) Bestimmen Sie den Flächeninhalt A des Segments.

Lösung 8

a) Es gilt $(s/2)^2 + (r-h)^2 = r^2$; es folgt $s = 2.6458$.

b) Mittelpunktswinkel α: $\cos(\alpha/2) = (r-h)/r$;

es folgt: $\alpha = 1.4455$ und $b = r \cdot \alpha = 2.8909$.

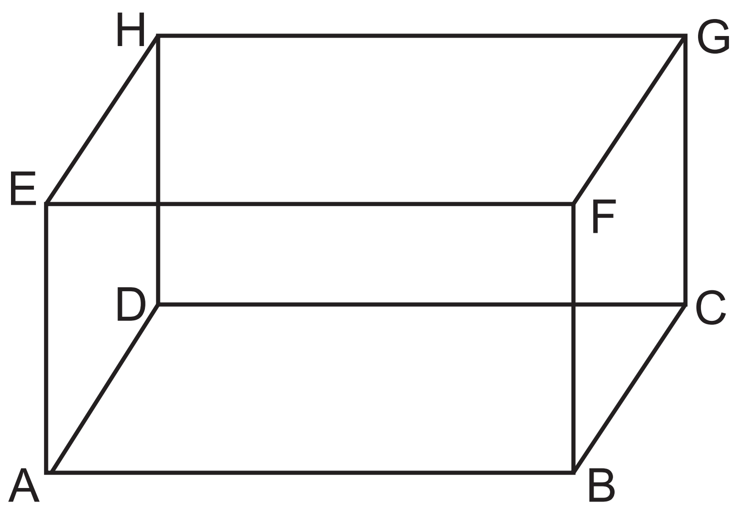
c) Der Flächeninhalt S des entsprechenden Sektors ist $S = \frac{\alpha}{2\cdot\pi} \cdot \pi \cdot r^2 = \alpha \cdot 2 = 2.8909$;

der Flächeninhalt D des Sehnendreiecks ist $D = s \cdot (r-h)/2 = 1.9843$;

es folgt: $A = S - D = 0.9066$.

Aufgabe 9 *Quadergeometrie*

Wie gross ist in einem Quader $ABCDEFGH$ mit Seitenlängen $\overline{AB} = 5$, $\overline{BC} = 4$, $\overline{AE} = 3$ der Winkel zwischen



a) der Kante AB und der Flächendiagonalen AF?

b) der Flächendiagonalen AC und der Raumdiagonalen AG?

Lösung 9

a) Es gilt: $\cos(\phi) = 5/\sqrt{5^2 + 3^2}$;

es folgt: $\phi = 30.96^o$.

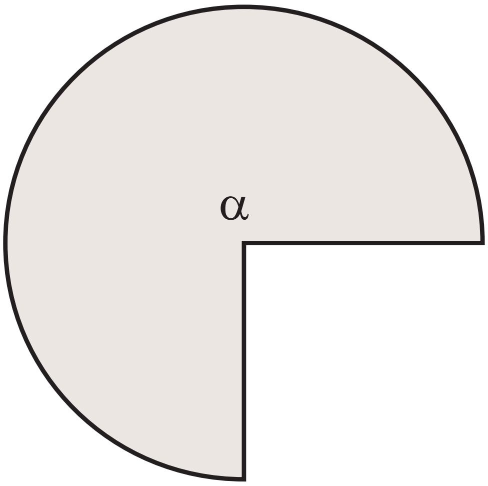
b) Es gilt: $\cos(\phi) = \sqrt{5^2 + 4^2}/\sqrt{5^2 + 4^2 + 3^2}$;

es folgt: $\phi = 25.10^o$.

Aufgabe 10 *Kegelgeometrie*

Die Abwicklung eines Kegels ist ein Kreissektor mit Zentriwinkel $\alpha = 270^o$.

Bestimmen Sie den Öffnungswinkel ϕ des Kegels.



Lösung 10

Seien s die Länge der Mantellinie und r der Radius des Kegels;

es gilt: $270^o/360^o \cdot 2 \cdot \pi \cdot s = 2 \cdot \pi \cdot r$;

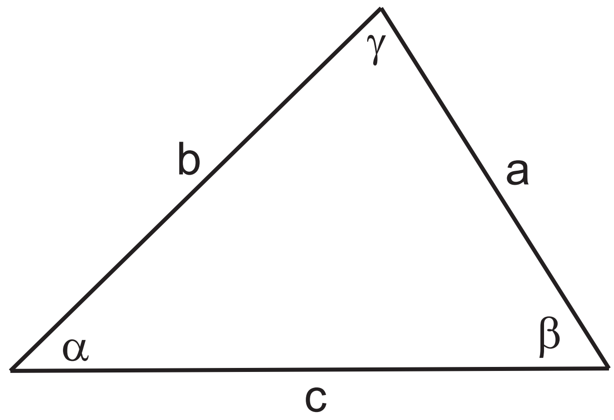
es folgt: $r = 3/4 \cdot s$;

es gilt: $\sin(\phi/2) = r/s = 3/4$;

es folgt: $\phi = 97.18$.

Trigonometrische Aufgaben: Allgemeine Dreiecke

Die folgenden vier Aufgaben stellen das kleine Einmaleins der Trigonometrie dar.



Aufgabe 11 Grundaufgabe

Von einem Dreieck sind die Länge $a = 37.2$ und die Winkel $\beta = 72.2^o$ und $\gamma = 40.4^o$ bekannt. Bestimmen Sie die Längen b und c und den Winkel α.

Lösung 11

Es gilt: $\alpha = 180^o - \beta - \gamma = 67.4^o$;

es gilt: $b = \frac{a \cdot \sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = 38.4$;

es gilt: $c = \frac{a \cdot \sin(\gamma)}{\sin(\alpha)} = 26.1$.

Aufgabe 12 Grundaufgabe

Von einem Dreieck sind die Längen $a = 7.0$ und $b = 10.0$ und der Winkel $\alpha = 38^o$ bekannt. Bestimmen Sie die Länge c und die Winkel β und γ.

Lösung 12

Es gilt: $\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{a} = 0.8795$ und somit $\beta_1 = 61.6^o$ und $\beta_2 = 118.4^o$;

es gilt: $\gamma_1 = 80.4^o$ und $\gamma_2 = 23.6^o$;

es gilt: $c_1 = \frac{a \cdot \sin(\gamma_1)}{\sin(\alpha)} = 11.21$ und $c_2 = \frac{a \cdot \sin(\gamma_2)}{\sin(\alpha)} = 4.55$.

Aufgabe 13 Grundaufgabe

Von einem Dreieck sind die Längen $a = 9.0$ und $b = 7.0$ und der Winkel $\gamma = 120^o$ bekannt. Bestimmen Sie die Länge c und die Winkel α und β.

Lösung 13

Es gilt: $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\gamma)} = 13.89$;

es gilt: $\sin(\beta) = \frac{b \cdot \sin(\gamma)}{c}$ und somit $\beta = 25.9^o$;

es gilt: $\alpha = 180^o - \beta - \gamma = 34.1^o$.

Aufgabe 14 Grundaufgabe

Von einem Dreieck sind die Längen $a = 3.0$, $b = 4.0$ und $c = 6.0$ bekannt. Bestimmen Sie die Winkel α, β und γ.

Lösung 14

Es gilt: $\cos(\alpha) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2 \cdot b \cdot c}$ und somit $\alpha = 26.4^o$;

es gilt: $\cos(\beta) = \frac{a^2+c^2-b^2}{2 \cdot a \cdot c}$ und somit $\beta = 36.3^o$;

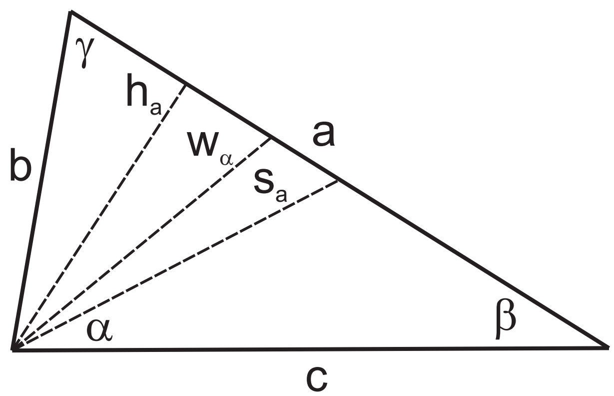
es gilt: $\gamma = 180^o - \alpha - \beta = 117.3^o$.

Ein wesentlicher Aspekt trigonometrischer Anwendungen ist das Verwenden von Hilfsdreiecken. Dieser Aspekt kann auch an einfacheren Konstellationen beübt werden.

Folgende Aufgaben exemplifizieren diesen Gedanken.

Aufgabe 15 *Dreiecksgeometrie*

Gegeben ist ein Dreieck mit Seitenlängen $a = 5$, $b = 6$ und $c = 7$.



a) Bestimmen Sie die Winkel im Dreieck.

b) Bestimmen Sie die Höhe h_a.

c) Bestimmen Sie die Länge der seitenhalbierenden Strecke s_a.

d) Bestimmen Sie die Länge der winkelhalbierenden Strecke w_α.

Lösung 15

a) Es gilt: $\alpha = 44^o$, $\beta = 57^o$, $\gamma = 79^o$.

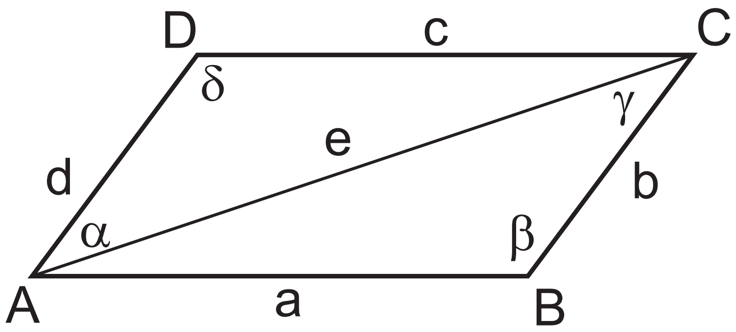
b) Es gilt: $h_a = \sin(\beta) \cdot c = \sin(57^o) \cdot 7 = 5.87$.

c) Es gilt: $s_a = \sqrt{(a/2)^2 + c^2 - a \cdot c \cdot \cos(\beta)} = 6.02$.

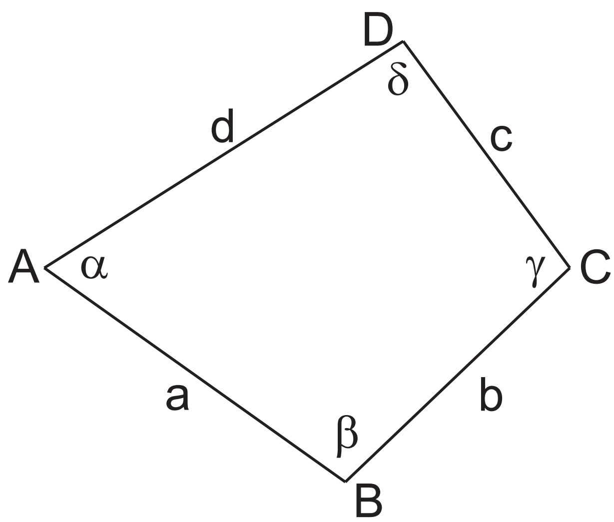
d) Es gilt: $w_\alpha = c \cdot \sin(\beta) / \sin(180^o - \beta - \alpha/2) = 5.98$.

Aufgabe 16 *Vierecksgeometrie*

a) Gegeben ist ein Parallelogramm $ABCD$ mit Seitenlängen $a = 5$ und $b = 3$, sowie Winkel $\alpha = 50^o$. Bestimmen Sie die Länge e der Diagonalen AC. Bestimmen Sie ebenfalls die Winkel zwischen den Seiten und der Diagonalen.



b) Gegeben ist ein allgemeines Viereck $ABCD$ mit Seitenlängen $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$ und Winkel $\beta = 100^o$ und $\gamma = 130^o$. Bestimmen Sie die Seitenlänge d und die fehlenden Winkel.



Lösung 16

a) Es gilt: $\delta = 180^o - \alpha = 130^o$; es gilt $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(\delta)} = 7.30$;

es gilt: $\sin(\alpha_1) = \sin(130^o) \cdot 5/7.30$. Es folgt $\alpha_1 = 31.65^o$ und $\alpha_2 = 18.35^o$;

natürlich gilt $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$.

b) Es gilt: $e = \overline{BD} = \sqrt{b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos(130^o)} = 7.30$;

es gilt: $\sin(\beta_1) = \sin(130^o) \cdot 5/7.30$; es folgt $\beta_1 = 31.65^o$ und $\beta_2 = 68.35^o$;

natürlich gilt $\beta_1 + \beta_2 = \beta$.

es gilt: $d = \sqrt{a^2 + e^2 - 2 \cdot a \cdot e \cdot \cos(68.35^o)} = 6.91$;

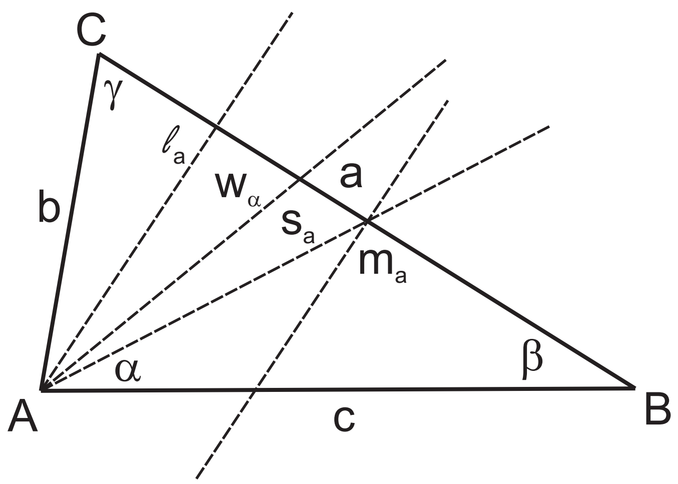
es gilt: $\sin(\alpha) = \sin(68.35) \cdot 7.30/6.91$; es folgt $\alpha = 79.1$ und $\delta = 50.9$.

Analytische Aufgaben

Planimetrische Grundbegriffe lassen sich auch anhand von Aufgaben aus der analytischen Geometrie behandeln.

Aufgabe 17 *Geradengleichung*

Ein ebenes kartesisches Koordinatensystem sei vorgegeben.



Das Dreieck ABC besitzt die Eckpunkte $A(1,1)$, $B(4,-3)$, $C(9,7)$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der seitenhalbierenden Geraden s_a.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Lotgeraden ℓ_a.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der mittelsenkrechten Geraden m_a.

d) Bestimmen Sie die Gleichung der winkelhalbierenden Gerade w_α.

Lösung 17

a) Seitenmitte $\overline{BC}$: $M(6.5, 2)$; somit $s_a : y = 2/11 \cdot x + 9/11$.

b) Steigung der Geraden BC: $m = 2$; somit $\ell_a : y = -1/2 \cdot x + 3/2$.

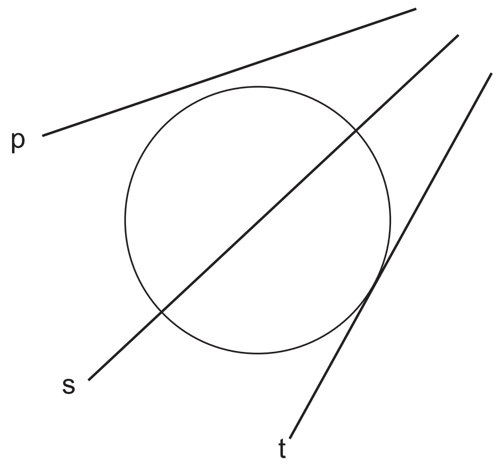
c) Steigung der Geraden BC: $m = 2$; somit $m_a : y = -1/2 \cdot x + 21/4$.

d) Steigungswinkel der Geraden AB und AC: $\alpha_1 = \arctan(-4/3)$ und $\alpha_2 = \arctan(6/8)$;

Steigung der Geraden w_α: $m = \tan(\alpha_1/2 + \alpha_2/2) = -1/7$; somit $w_\alpha : y = -1/7 \cdot x + 6/7$.

Aufgabe 18 *Kreisgeometrie*

Der Punkt $P(4, 1)$ liegt auf einem Kreis mit Zentrum in $Z(0, -2)$.



a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangenten t an diesen Kreis durch P.

b) Die Sekante $s : y = 1/2 \cdot x + 1/2$ schneidet den Kreis in zwei Punkten. Bestimmen Sie deren Koordinaten.

c) Zeigen Sie, dass die Gerade $p : y = -1/2 \cdot x + 13$ eine Passante des Kreises ist.

Lösung 18

a) Die Tangente steht senkrecht zur Geraden $y = \frac{3}{4} \cdot x - 2$, es folgt $t : y = -\frac{4}{3} \cdot x + \frac{19}{3}$.

b) Der Kreis hat Radius $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$; die Schnittpunkte erfüllen $x^2 + (y + 2)^2 = 5^2$;

es folgt $x^2 + (x/2 + 5/2)^2 = 25$ und $x_1 = 3$, $x_2 = -5$, sowie $y_1 = 2$, $y_2 = -2$.

c) Die Gerade durch Z: $y = 2 \cdot x - 2$ steht senkrecht zu p und schneidet p in $(6, 10)$;

somit ist der Abstand von p zu Z: $\sqrt{6^2 + 12^2} > 5$.

Vektorgeometrische Aufgaben

Vektorgeometrische Aufgaben können auch dazu dienen, planimetrische und stereometrische Konzepte zu festigen.

Eigenständige Bedeutung haben Aufgaben zum Skalarprodukt und zur Parametrisierung von Geraden.

Aufgabe 19 *Skalarprodukt*

Ein räumliches, kartesisches Koordinatensystem sei vorgegeben.

Das Dreieck ABC besitzt die Eckpunkte $A(2,2,2)$, $B(2,-6,8)$, $C(8,2,10)$.

Bestimmen Sie den Winkel α.

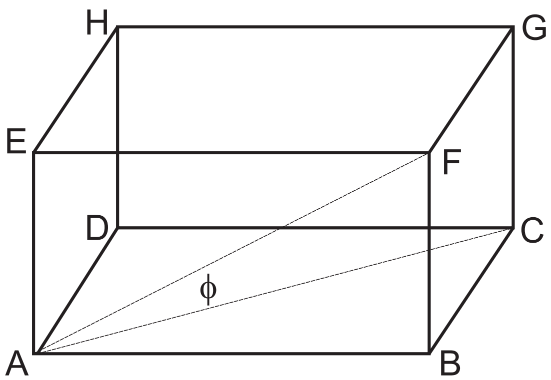
Lösung 19

Es gilt: $|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \cos(\alpha) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$;

es folgt: $10 \cdot 10 \cdot \cos(\alpha) = (0,-8,6) \cdot (6,0,8) = 48$ und $\alpha = 61.31^o$.

Aufgabe 20 *Skalarprodukt*

Wie gross ist in einem Quader $ABCDEFGH$ mit Seitenlängen $\overline{AB} = 5$, $\overline{AD} = 4$, $\overline{AE} = 3$ der Winkel ϕ zwischen der Flächendiagonalen AC und AF?



Lösung 20

In einem geeigneten räumlichen Koordinatensystem mit Ursprung A wird dieser Quader durch die Vektoren $\vec{b} = (5,0,0), \vec{d} = (0,4,0), \vec{e} = (0,0,3)$ aufgespannt;

es seien: $\vec{c} = \overrightarrow{AC} = (5,4,0)$ und $\vec{f} = \overrightarrow{AF} = (5,0,3)$;

es gilt: $|\vec{c}| \cdot |\vec{f}| \cdot \cos(\phi) = \vec{c} \cdot \vec{f}$;

es folgt: $\sqrt{5^2+4^2} \cdot \sqrt{5^2+3^2} \cdot \cos(\phi) = (5,4,0) \cdot (5,0,3) = 25$ und $\phi = 47.96^o$.

Aufgabe 21 *Skalarprodukt*

a) Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\vec{a} = \frac{1}{3} \cdot (2, 2, 1), \vec{b} = \frac{1}{3} \cdot (-2, 1, 2), \vec{c} = \frac{1}{3} \cdot (1, -2, 2)$$

Einheitsvektoren sind, welche paarweise aufeinander senkrecht stehen.

b) Der Vektor

$$\vec{d} = (10, 20, 30)$$

kann in die Richtungen der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ zerlegt werden, d.h. es gibt Skalare u, v und w so, dass

$$\vec{d} = u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b} + w \cdot \vec{c}.$$

Bestimmen Sie u, v, w.

Lösung 21

a) Es gilt $\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{b} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{c} = 1$ und $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$.

b) Es gilt: $\vec{d} \cdot \vec{a} = (u \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b} + w \cdot \vec{c}) \cdot \vec{a} = u \cdot \vec{a} \cdot \vec{a} + v \cdot \vec{b} \cdot \vec{a} + w \cdot \vec{c} \cdot \vec{a} = u$;

es folgt: $u = \vec{d} \cdot \vec{a} = 30$ und analog $v = \vec{d} \cdot \vec{b} = 20$, $v = \vec{d} \cdot \vec{c} = 10$.

Aufgabe 22 *Parametrisierung*

Ein räumliches, kartesisches Koordinatensystem sei vorgegeben.

Das Dreieck ABC besitzt die Eckpunkte $A(2, 2, 2)$, $B(2, -6, 8)$, $C(8, 2, 10)$.

a) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der seitenhalbierenden Geraden s_c.

b) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der winkelhalbierenden Geraden w_A.

c) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Lotgeraden ℓ_B.

d) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der mittelsenkrechten Geraden m_b.

Lösung 22

Eine Parametergleichung einer Geraden hat die Form

$$\vec{x} = \vec{p} + \lambda \cdot \vec{r}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Hier ist $\vec{p}$ ein Aufvektor und $\vec{r}$ ein Richtungsvektor der Geraden.

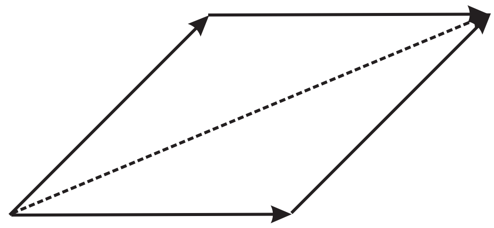
a) Aufvektor: $\vec{p} = (8, 2, 10)$;

sei M die Mitte der Strecke AB;

Richtungsvektor: $\vec{r} = \overrightarrow{MC} = (8, 2, 10) - \frac{1}{2} \cdot \{(2, 2, 2) + (2, -6, 8)\} = (6, 4, 5)$.

b) Aufvektor: $\vec{p} = (2, 2, 2)$;

Richtungsvektor: $\vec{r} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (0, -8, 6) + (6, 0, 8) = (6, -8, 14)$;

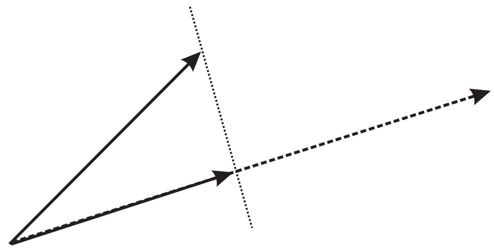


hier wird verwendet, dass die Summe zweier Vektoren, welche gleich lang sind, deren Zwischenwinkel halbiert.

c) Aufvektor: $\vec{p} = (2, -6, 8)$;

sei $\vec{q}$ die Projektion des Vektors $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ in Richtung des Vektors $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$;

es gilt: $\vec{q} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\vec{c} \cdot \vec{c}} \cdot \vec{c} = \frac{1}{100} \cdot \{(0, -8, 6) \cdot (6, 0, 8)\} \cdot (6, 0, 8) = \frac{1}{100} \cdot (288, 0, 384)$;



hier wird verwendet, dass der Betrag das Skalarprodukts eines Vektors mit einem Einheitsvektor gleich der Länge der Projekton des Vektors in Richtung des Einheitsvektors ist (das Vorzeichen des Skalarproduktes ist vom Zwischenwinkel der beiden Vektoren abhängig);

Richtungsvektor: $\vec{r} = \vec{b} - \vec{q} = (0, -8, 6) - \frac{1}{100} \cdot \{(288, 0, 384) = \frac{1}{100} \cdot (-288, -800, 216)$.

d) Aufvektor: $\vec{p} = \frac{1}{2} \cdot \{(2, 2, 2) + (8, 2, 10)\} = (5, 2, 6)$;

aus c) folgt $\vec{b} - \vec{q}$ steht senkrecht auf $\vec{c}$;

Richtungsvektor: $\vec{r} = \vec{q} = \frac{1}{100} \cdot (-288, -800, 216)$.