GMFH - Gesellschaft für Mathematik an Schweizer Fachhochschulen
SMHES - Société pour les Mathématiques dans les Hautes Ecoles Spécialisées suisses

Mathematik-Referenzaufgaben zum Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität (RLP-BM 2012)

Grundsatzfrage 4

- … Gleichungen mithilfe von Funktionen visualisieren und interpretieren.

Grundsatzfrage 9

- … aus der Gleichung einer elementaren Funktion den Graphen skizzieren und aus dem Graphen einer elementaren Funktion seine Funktionsgleichung bestimmen (auch ohne Hilfsmittel).

- … Schnittpunkte von Funktionsgraphen grafisch bestimmen und berechnen.

- … Gleichungen und Ungleichungen mithilfe von Funktionen visualisieren und interpretieren.

- … ausgezeichnete Stellen (Nullstellen, lokale und globale Extremwerte) grafisch bestimmen und berechnen.

Thomas Borer (HTW Chur)
Andrea Graf (SUPSI Manno)
Egon Vock (HSLU T&A Horw)

Referenzaufgaben zum RLP-BM 2012 Mathematik
Thomas Borer (Teil 1), Egon Vock (Teil 2), 24.9.2013

Grundsatzfragen 4 und 9

Aufgaben Teil 1

1. Gegeben sind die nachfolgenden Funktionen.

   Skizzieren Sie die dazugehörigen Funktionsgraphen ohne Hilfsmittel in ein kartesisches Koordinatensystem.

   a) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = 2$

   b) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = x$

   c) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = 2x - 3$

   d) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = x^2$

   e) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = (x - 3)^2 + 4$

   f) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = x^5$

   g) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = x^8$

   h) f: $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{x}$

   i) f: $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = \frac{1}{x^2}$

   j) f: $\mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = \sqrt{x}$

   k) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = 2^x$

   l) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

   m) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = e^x$

   n) f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto y = f(x) = e^{-x}$

o) f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x) = \log_{10}(x)$

p) f: $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x) = \ln(x)$

q) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x) = \sin(x)$

r) f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x) = \cos(x)$

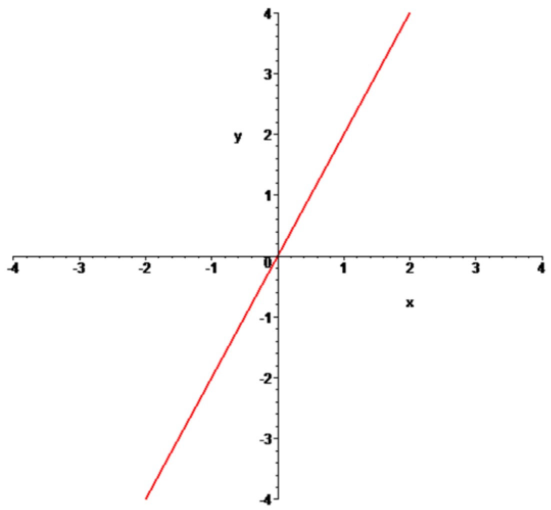
s) f: $\left\{x \in R \mid x \neq \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi,\ k \in Z\right\} \rightarrow \mathbb{R}$

$x \mapsto y = f(x) = \tan(x)$

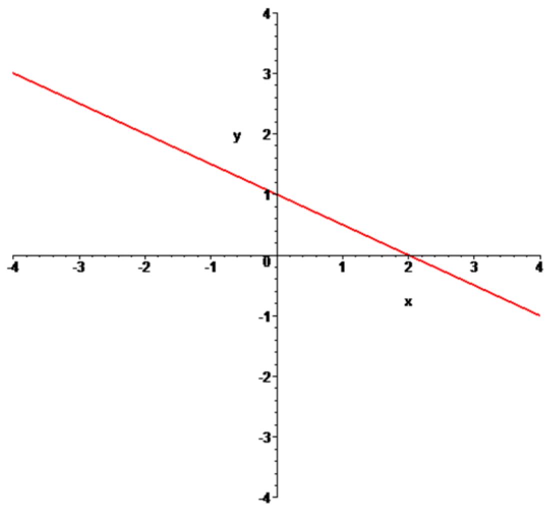
2. Gegeben sind die nachfolgenden Funktionsgraphen.

Bestimmen Sie die dazugehörigen Funktionsgleichungen ohne Hilfsmittel.

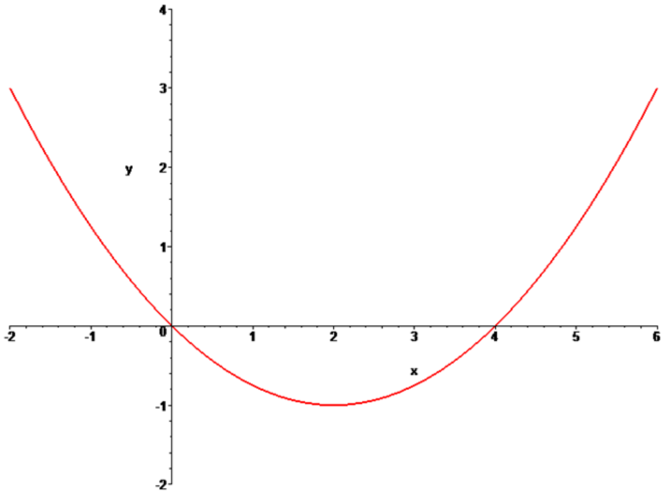
a) Gerade



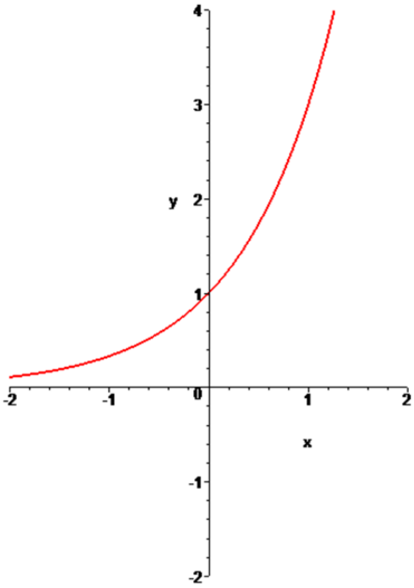
b) Gerade



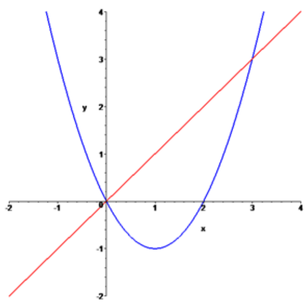
c) Parabel



d) Exponentialfunktion



3. Die Graphen zweier Funktionen sind eine Gerade und eine Parabel:

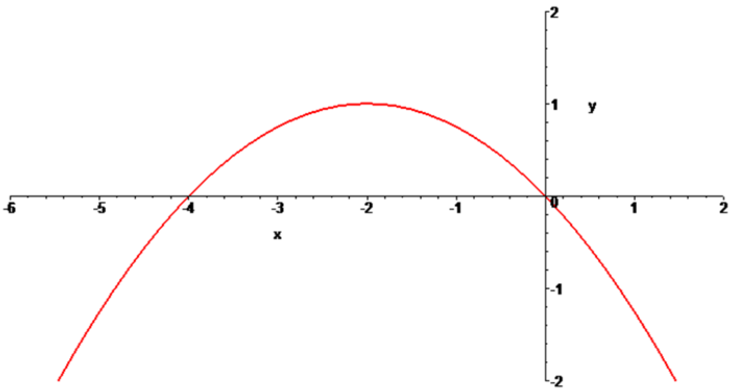


a) Lesen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen direkt aus der Grafik ab.

b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der beiden Funktionen.

c) Berechnen Sie aus den beiden Funktionsgleichungen die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Graphen.

4. Der Graph einer Funktion ist eine Parabel:



a) Lesen Sie die Nullstelle(n) sowie das absolute Maximum der Funktion direkt aus der Grafik ab.

b) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion.

c) Berechnen Sie aus der Funktionsgleichung die Nullstelle(n) sowie das absolute Maximum der Funktion.

Lösungen Teil 1

1. (Generell: Graphen sollen auswendig, d.h. ohne Berechnung von einzelnen Kurvenpunkten skizziert werden können.)

   a) (Gerade, Steigung = 0, Achsenabschnitt = 2)

   b) (Gerade, Steigung = 1, Achsenabschnitt = 0)

   c) (Gerade, Steigung = 2, Achsenabschnitt = -3)

   d) (Parabel, nach oben geöffnet, Scheitelpunkt (0|0))

   e) (Parabel, nach oben geöffnet, Scheitelpunkt (3|4))

   f) („von links unten nach rechts oben“)

   g) („von links oben nach rechs oben“)

   h) (Hyperbel, Äste im 1. und 3. Quadranten)

   i) (Äste im 1. und 2. Quadranten, Graph nähert sich der x-Achse „schneller“ als der y-Achse)

   j) (gedrehter Parabelast durch (0|0), nur im 1. Quadranten)

   k) (Graph durch (0|1), monoton steigend mit zunehmender Steigung)

   l) (Graph durch (0|1), monoton fallend mit abnehmender Steigung)

   m) (Graph durch (0|1), monoton steigend mit zunehmender Steigung)

   n) (Graph durch (0|1), monoton fallend mit abnehmender Steigung)

   o) (Graph durch (1|0), monoton steigend mit abnehmender Steigung)

   p) (Graph durch (1|0), monoton steigend mit abnehmender Steigung)

   q) (Graph durch Punkte $(k\cdot\pi|0)$, $(\pi/2 + k\cdot 2\pi|1)$, $(-\pi/2 + k\cdot 2\pi|-1)$)

   r) (Graph durch Punkte $(\pi/2 + k\cdot\pi|0)$, $(k\cdot 2\pi|1)$, $(\pi + k\cdot 2\pi|-1)$)

   s) (Graph durch Punkte $(k\cdot\pi|0)$, monoton steigende Äste zwischen Definitionslücken $x = \pi/2 + k\cdot\pi$)

2. a) $y = f(x) = 2x$ (Gerade, Steigung 2, Achsenabschnitt 0)

   b) $y = f(x) = -\frac{1}{2}x + 1$ (Gerade, Steigung -1/2, Achsenabschnitt 1)

   c) $y = f(x) = a\cdot x(x - 4)$, $f(2) = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
   $\Rightarrow y = f(x) = \frac{1}{4}x(x - 4)$

   oder

   $y = f(x) = a(x - 2)^2 - 1$, $f(0) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$
   $\Rightarrow y = f(x) = \frac{1}{4}(x - 2)^2 - 1$

   d) $y = f(x) = a^x$, $f(1) = 3 \Rightarrow a = 3$
   $\Rightarrow y = f(x) = 3^x$

3. a) (0|0) und (3|3)

   b) $y = f_1(x) = x$ (Gerade, Steigung 1, Achsenabschnitt 0)
   $y = f_2(x) = (x - 1)^2 - 1$ (Verschobene Normalparabel, Scheitelpunkt (1|-1))

   c) $f_1(x) = f_2(x) \Rightarrow x_1 = 0 \vee x_2 = 3$
   $y_1 := f_1(x_1) = 0$, $y_2 := f_1(x_2)$
   $\Rightarrow$ Schnittpunkte $S_1(x_1|y_1) = (0|0)$, $S_2(x_2|y_2) = (3|3)$

4. a) Nullstellen: $x_1 = -4$, $x_2 = 0$
Absolutes Maximum: bei $x_3 = -2$ mit $y_{max} = 1$

b) $y = f(x) = a(x + 2)^2 + 1$, $f(0) = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{4}$
$\Rightarrow y = f(x) = -\frac{1}{4}(x + 2)^2 + 1$

c) Nullstellen: $f(x) = 0$ (quadratische Gleichung) mit Lösungen $x_1 = -4$, $x_2 = 0$
Absolutes Maximum: beim Scheitelpunkt $S(-2|1)$, absolutes Maximum $y_{max} = 1$

Gleichungen mit Hilfe von Veranschaulichung näherungsweise lösen

Motivation: Viele Gleichungen können mit algebraischen Umformungen nicht gelöst werden. Bei einer Gleichung ohne Formvariablen gelingt es, die Lösungen beliebig genau numerisch zu berechnen. Dabei muss oft ein Intervall angegeben werden, in welchem eine Lösung gesucht werden soll. Bei den folgenden Aufgaben müssen Gleichungen grafisch gelöst werden. Dabei wird keine exakte Lösung x_o gesucht, sondern ein Intervall, in welchem eine Lösung liegen muss. Dieses Intervall muss nicht sehr klein sein.

Aufgaben Teil 2

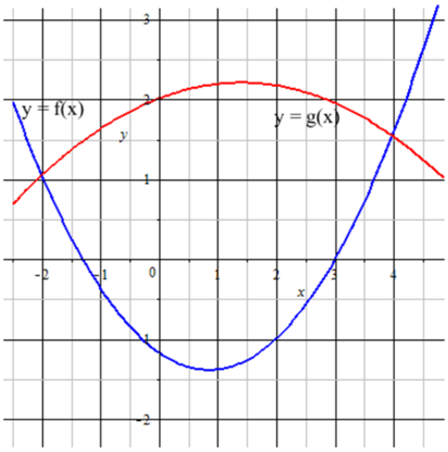
1. Das Bild rechts zeigt die Graphen der Funktionen f und g.

   a) Wie viele Lösungen hat die Gleichung

   $$f(x) = g(x)$$

   im Intervall [–2.5 ; 4.5] ?

   b) Bestimmen Sie grafisch die Lösungen der Gleichung $f(x) = g(x)$ im Intervall [–2.5 ;5]



2. Die Funktionen f und g seien gegeben durch $f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^2$.

   a) Skizzieren Sie die Graphen von f und g.

   b) Bestimmen Sie grafisch die Lösungen der Gleichung

   $$\sqrt{x} = x^2$$

3. Gegeben ist die Gleichung $\sin(x) = e^{-x}$

   a) Geben Sie ein sinnvolles Intervall an, in welchem die kleinste Lösung der Gleichung liegt.

   b) Geben Sie ein sinnvolles Intervall an, in welchem die zweitkleinste Lösung der Gleichung liegt.

4. Lösen Sie die Gleichung $x^2 - 3x = 0$ und veranschaulichen Sie die Lösungen mit Hilfe einer Grafik.

5. Sogenannte Äquivalenzumformungen beeinflussen die Lösungsmenge einer Gleichung nicht, aber deren grafische Veranschaulichungen.
   Lösen Sie die folgenden äquivalenten Gleichungen grafisch gemäss den angegebenen Gleichungen.

   a) $x^2 - 2x = 1$

   b) $x^2 = 2x + 1$

   c) $x^2 - 2x - 1 = 0$

6. Gegeben ist die folgende Ungleichung:

$x(x - 2) < x$

a) Fassen Sie die beiden Terme links und rechts des Ungleichheitszeichens als Funktionsausdrücke auf und skizzieren Sie die Graphen der entsprechenden Funktionen in einem Koordinatensystem.

b) Bestimmen Sie grafisch die Lösungsmenge der Ungleichung.
Beachten Sie: Die Funktionen f und g seien definiert durch $f(x) = x(x - 2)$ und $g(x) = x$. Die Zahl x_1 erfüllt die Ungleichung $x(x - 2) < x$ genau dann, wenn $f(x_1) < g(x_1)$.

Lösungen Teil 2

1. a) Für welche x-Werte gilt $f(x) = g(x)$?

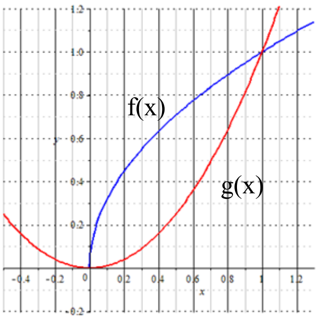
$f(x_1) = g(x_1)$ bedeutet, dass die Funktionen an der Stelle x_1 denselben Funktionswert haben und dass somit die Graphen von f und g durch den gemeinsamen Punkt $(x_1; f(x_1)) = (x_1; g(x_1))$ gehen.

Im Intervall [–2.5 ; 4.5] haben die Graphen von f und g zwei gemeinsame Punkte. Also hat die Gleichung $f(x) = g(x)$ in diesem Intervall zwei Lösungen.

b) Die Lösungen $x_1 = -2$ und $x_2 = 4$ liegen in den Intervallen [–2.2; –1.8] und [3.8; 4.2]. Beachten Sie: Die x-Werte der Schnittpunkte sind die Lösungen.

2. a) Das Bild rechts zeigt die Graphen von f und g, wobei

$f(x) = \sqrt{x}$ und $g(x) = x^2$

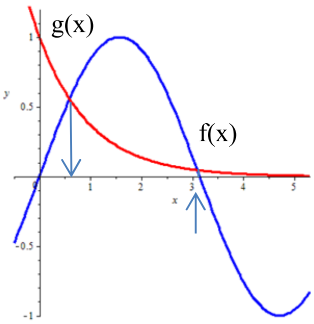


b) Die Funktionen f und g haben an den Stellen 0 und 1 denselben Funktionswert. Die Gleichung $\sqrt{x} = x^2$ hat somit die Lösungen

$x_1 = 0$ und $x_2 = 1$

3. Die Näherungslösungen werden grafisch bestimmt. Das Bild rechts zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit den Funktionsgleichungen

$f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = e^{-x}$



a) Die kleinste Lösung der Gleichung liegt im

Intervall $x_1 \in [0.0; 1.0]$ (grosszügig)

b) Die zweikleinste Lösung der Gleichung liegt etwa im

Intervall $x_2 \in [2.5; 3.5]$ (grosszügig)

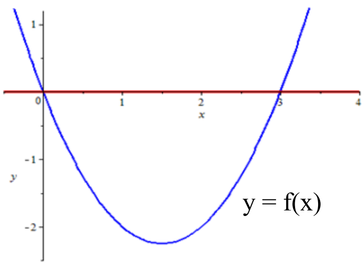
4. Versuchen Sie bei einer Gleichung vom Typ $f(x) = 0$ jeweils f(x) zu faktorisieren (Produktdarstellung).

$x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3x) = 0 \Rightarrow$

Die Lösungen lauten $x_1 = 0$ und $x_2 = 3$.

Veranschaulichung: Der Graph der Funktion mit der Funktionsgleichung $y = x^2 - 3x$ ist eine nach oben geöffnete Parabel und hat in den Punkten (0; 0) und (3; 0) Nullstellen.

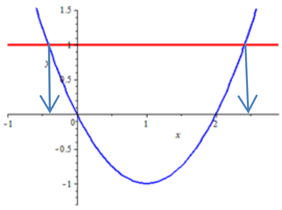
Mit diesen Informationen kann der Graph skizziert werden.



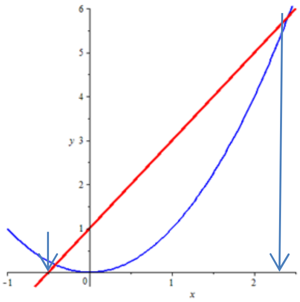
5. Zur Veranschaulichung der Gleichung f(x) = g(x) werden die Graphen von f und g dargestellt.
Die x-Werte der Schnittpunkte stellen die Lösungen der Gleichung dar.
Die Graphen können ohne CAD-Taschenrechner gezeichnet werden.

a) $x^2 - 2x = 1$

$x_1 \approx -0.4 \quad x_2 \approx 2.4$

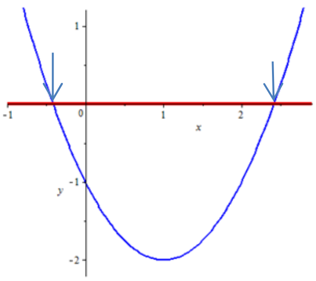


b) $x^2 = 2x + 1$

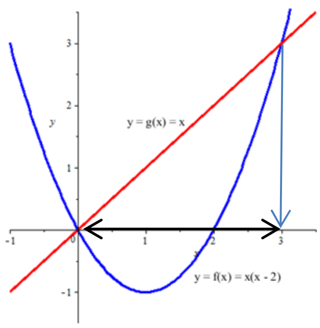


c) $x^2 - 2x - 1 = 0$

Den Graphen $y = x^2 - 2x$ zeichnen und eine Einheit nach unten verschieben führt auf den Graphen $y = x^2 - 2x - 1$.



6. a) Das Bild rechts zeigt die Graphen der Funktionen mit Funktionsgleichungen $y = f(x) = x(x-2)$ und $y = g(x) = x$

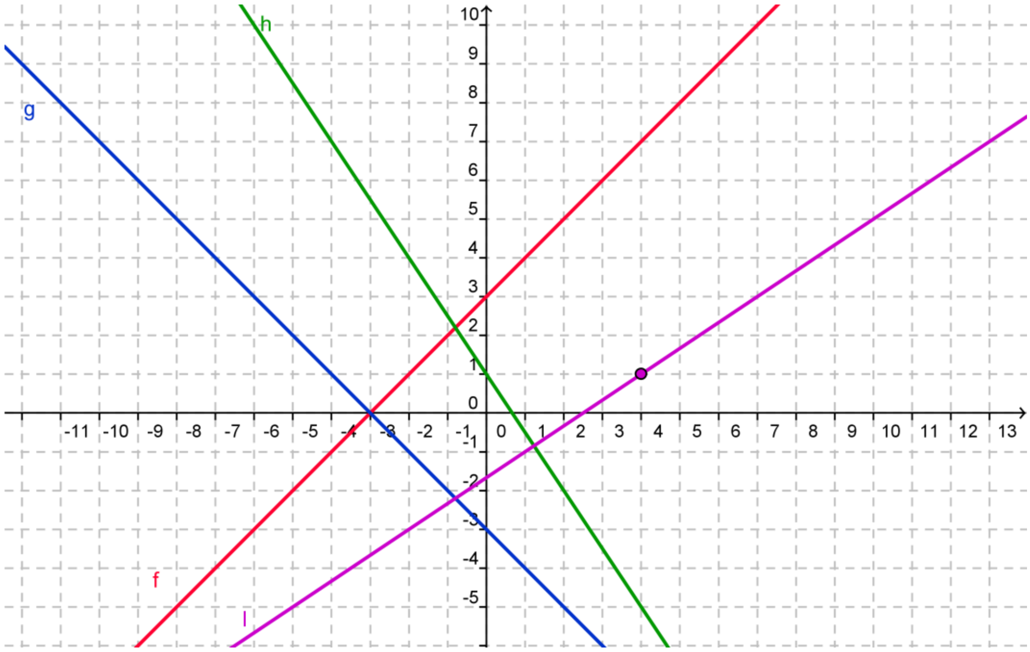


b) Für die Lösungen von $x(x-2) < x$ respektive $f(x) < g(x)$ stellt sich die Frage:
Für welche x sind die Funktionswerte von f kleiner als jene von g? (Die Punkte des Graphen von f liegen unterhalb jenen von g.)

Die Ungleichung wird von allen x erfüllt mit $x \in \,]0; 3[\, = (0; 3)$ (offenes Intervall).

Domanda 9

1) Determinare le equazioni delle funzioni rappresentate nel diagramma seguente:



2) Rappresentare graficamente le funzioni.

$f(x) = 3x - 2$ e $g(x) = 2x - 3$

a) Determinare graficamente

i) La soluzione dell'equazione $f(x) = g(x)$

ii) La soluzione della disequazione $f(x) > g(x)$

b) Verificare quanto trovato analiticamente.

3) Esercizio sulle famiglie di funzioni affini.

a) Rappresentare sullo stesso grafico

$$f_a(x) = \frac{x}{2} + a \quad \text{per } a = -2;\ 0;\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{2}$$

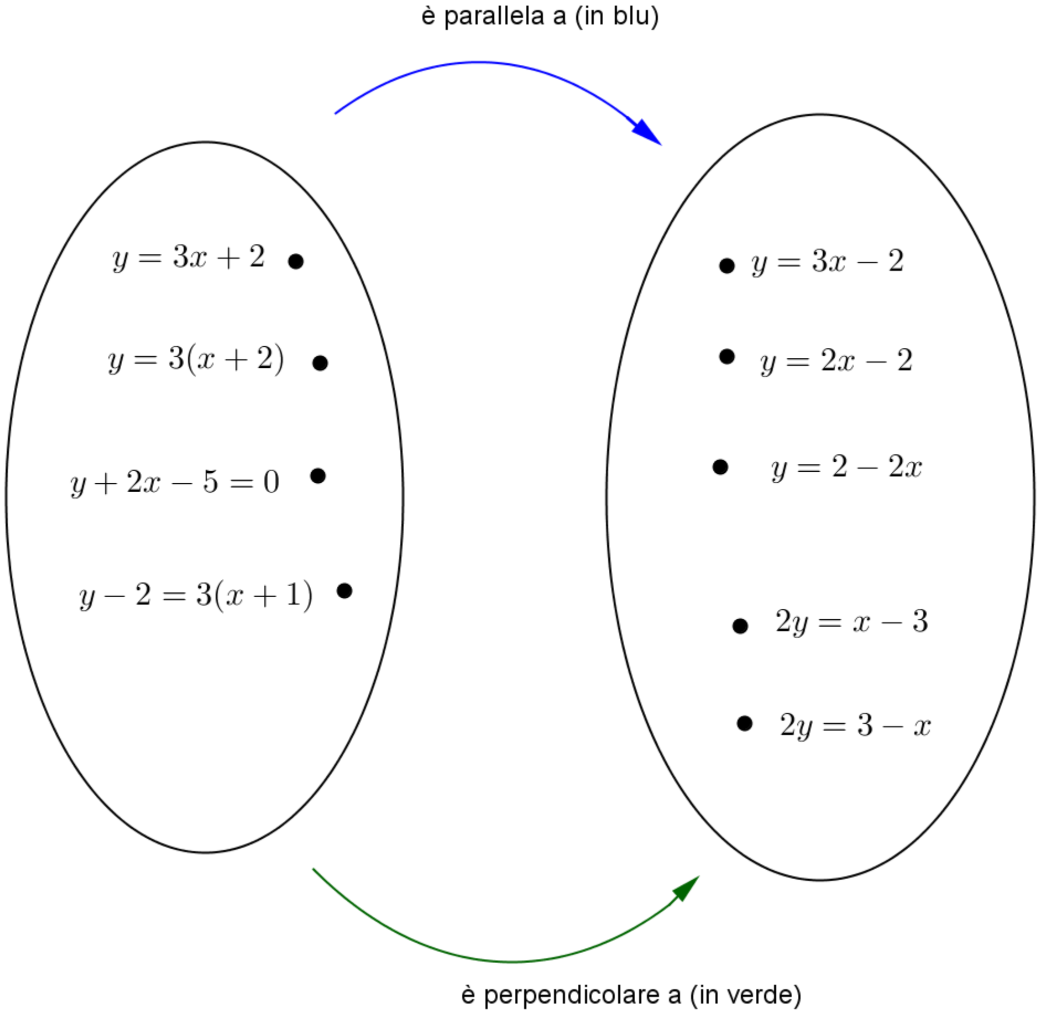
b) Rappresentare sullo stesso grafico

$$g_b(x) = bx + 1 \quad \text{per } b = -2;\ 0;\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{2}$$

c) Rappresentare sullo stesso grafico

$$h_c(x) = 2 + c \cdot (x - 1) \quad \text{per } c = -2;\ 0;\ \frac{1}{3};\ \frac{3}{2}$$

4) Completare il diagramma, senza disegnare il grafico delle rette



5) Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $(x+1)^2 \leq (x-1)$

b) $3(ax+1) > x + a$

6) Sappiamo che 0°C corrispondono a 32°F e 100°C corrispondono a 212°F.

a) Determinare l'espressione della funzione che trasforma i gradi Celsius in gradi Fahrenheit, sapendo che si tratta di una funzione affine.

b) Rappresentare graficamente la funzione trovata

c) A quale temperatura il valore in gradi Fahrenheit e in gradi Celsius è identico?

d) Determinare la funzione inversa che trasforma gradi Celsius in gradi Fahrenheit

e) Un incremento di 10°C a quanti gradi Fahrenheit di incremento corrisponde?

7) I costi fissi e variabili di tre abbonamenti telefonici sono rappresentati nella tabella:

	Abbonamento	Minuti compresi	Costo al minuto
ACOM	15	40	0.20
BTEL	10	30	0.30
CPHON	10	0	0.20

a) Scrivere l'espressione delle funzioni a tratti $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ che rappresentano i costi in base ai minuti di conversazione mensili dei tre abbonamenti.
b) Rappresentare graficamente le tre funzioni.
c) Determinare per quale utilizzo conviene la soluzione BTEL.

8) $f(x) = \underbrace{ax^2 + bx + c}_{A} = \underbrace{a(x - x_1)(x - x_2)}_{B} = \underbrace{a(x - p)^2 + q}_{C}$ sono tre rappresentazioni della funzione quadratica.

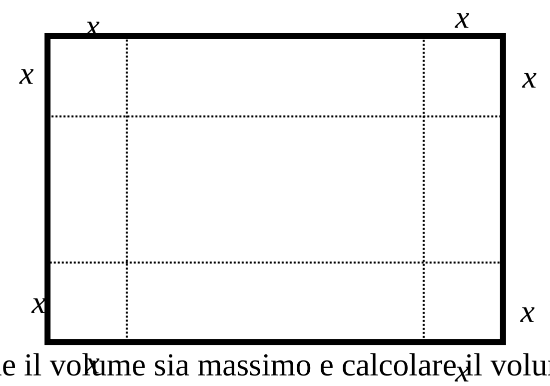
a) Indicare quale delle tre forme è la più indicata e quale la meno indicata per i seguenti scopi:

Operazione	Forma più indicata	Forma meno indicata
Determinare le coordinate del vertice		
Determinare gli zeri		
Sommare due funzioni quadratiche		
Determinare l'ordinata all'origine		

b) Nel caso $f(x) = 2(x - 1)(x + 3)$ determinare le restanti forme e svolgere i compiti elencati nella tabella sia tramite la forma più indicata, sia tramite quella meno indicata.
c) In quali casi le funzioni quadratiche non possono essere rappresentata in tutti e tre i modi?

9) Da un foglio di dimensione 400x500 vengono ritagliati gli angoli come in figura. Ripiegando i bordi si ottiene una vaschetta.

a) Scrivere l'espressione della funzione *f* che calcola il volume della vaschetta in funzione della misura *x*.
b) Indicare il dominio di *f*.
c) Rappresentare il grafico della funzione *f*.
d) Calcolare il volume se *x*=100.



e) Determinare *x* in modo tale che il volume sia massimo e calcolare il volume massimo.

10) Le traiettorie degli animali “saltellanti” come le rane sono tipicamente delle parabole. Inseriamo la rana in un sistema di coordinate cartesiane con il punto di partenza del salto nell’origine e il salto lungo 2.7 *m* in direzione dell’asse *x*-positiva e che raggiunge un’altezza massima di 0.9 *m*.

a) Calcolare l’equazione della traiettoria.

b) Determinare se la rana riesce a superare un muretto alto 0.7 *m* posto ad una distanza di 2.0 *m* dal punto di partenza.

c) Determinare in quali punti la rana si trova ad una quota di esattamente 0.5 *m*.

11) Risolvere le seguenti equazioni:

a) $3x^2 + 5 = 7x$

b) $x^2 - x + 1 = 0$

c) $5 + 4x - 3x^2 = 0$

d) $x^4 - 2x^2 = 8$

12) Risolvere le seguenti disequazioni:

a) $3x^2 + 5 > 7x$

b) $x^2 - x + 1 < 0$

c) $5 + 4x - 3x^2 \geq 0$

d) $x^4 - 2x^2 \leq 8$

13) Data l’equazione $2x^2 + (2k - 1)x + k - 1 = 0$, determinare il valore del parametro *k* affinché

a) $x_1 = 2$

b) $x_1 = -\frac{1}{x_2}$

c) $x_1 = x_2$

d) $x_1 = -x_2$

e) $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{4}$