GMFH - Gesellschaft für Mathematik an Schweizer Fachhochschulen
SMHES - Société pour les Mathématiques dans les Hautes Ecoles Spécialisées suisses

Mathematik-Referenzaufgaben zum Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität (RLP-BM 2012)

Grundsatzfrage 2

- … lineare und quadratische Gleichungen lösen, verschiedene Lösungsmethoden erklären und anwenden, inkl. Parameterdiskussion (auch ohne Hilfsmittel).

Grundsatzfrage 3

- … ein lineares Gleichungssystem mit maximal drei Variablen lösen (auch ohne Hilfsmittel).

Josef F. Bürgler (HSLU T&A Horw)

Grundsatzfragen 2 + 3

Josef F. Bürgler (HSLU T&A, GMFH)

14. September 2013

2 Lineare und quadratische Gleichungen

Grundsatzfrage 2: … lineare und quadratische Gleichungen lösen, verschiedene Lösungsmethoden erklären und anwenden, inkl. Parameterdiskussion (auch ohne Hilfsmittel).

Es wird hier kein Beispiel einer linearen Gleichung gezeigt. Statt dessen zeigen wir einige Beispiele, die auf quadratische Gleichungen führen.

2.1 Gleichung, die sich auf eine quadratische zurückführen lässt

Bestimme die Lösungsmenge $\mathbf{L} \subset \mathbb{R}$ der Gleichung

$$\left(x+\frac{2}{7}\right)^3 = x^3 + \frac{2}{7}$$

Lösung: Durch Ausmultiplizieren oder mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes [1] erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} & & \left(x+\frac{2}{7}\right)^3 &= x^3+\frac{2}{7} & & \\ &\Longleftrightarrow & x^3+3x^2\frac{2}{7}+3x\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{2}{7}\right)^3 &= x^3+\frac{2}{7} & & \Big|\, -x^3-\frac{2}{7} \\ &\Longleftrightarrow & \frac{6}{7}x^2+\frac{12}{7^2}x-\frac{90}{7^3} &= 0 & & \Big|\, \cdot\left(\frac{7}{6}\right) \\ &\Longleftrightarrow & x^2+\frac{2}{7}x-\frac{15}{7^2} &= 0 & & \Big|\, \cdot 7^2 \\ &\Longleftrightarrow & 7^2x^2+14x-15 &= 0 & & \end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen [2]

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{-14+\sqrt{14^2-4\cdot 49\cdot(-15)}}{2\cdot 7^2} = \frac{-14+56}{14\cdot 7} = \frac{3}{7}, \quad \text{und} \\ x_2 &= \frac{-14-\sqrt{14^2-4\cdot 49\cdot(-15)}}{2\cdot 7^2} = \frac{-14-56}{14\cdot 7} = -\frac{5}{7} \end{aligned}$$

[1] Der binomischer Lehrsatz für $n=2$ lautet $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$. Für $n=3$ lautet er $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

[2] Die quadratische Gleichung $ax^2+bx+c=0$ hat die Lösungen $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

was man leicht durch Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung überprüft (Übung!). Die Gleichung hat also die Lösungsmenge $\mathbf{L} = \left\{\frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right\}$.

2.2 Eine quadratische Gleichung bestimmen, wenn man deren Lösungen kennt

Gesucht ist eine quadratische Gleichung, deren Lösungen 9 und 0 sind.

Lösung: Eine lineare Gleichung mit der Lösung 9 wäre beispielsweise $x-9=0$, aber auch $2x-18=0$ oder $-3x+27=0$. Es ist also sehr leicht, eine lineare Gleichung mit einer ganz bestimmten Lösung zu konstruieren.

Ganz analog geht man bei quadratischen Gleichungen vor: man bildet zwei Linearfaktoren $(x-9)$ und $(x-0)$ mit den beiden gewünschten Lösungen und multipliziert diese

$$(x-9)(x-0)=0$$

Diese Gleichung hat sicherlich die beiden Lösungen $x=9$ und $x=0$, denn das Produkt zweier reeller Zahlen ist nur dann Null, wenn mindestens einer der beiden Faktoren Null ist, d.h. in diesem Fall wenn $x-9=0$ oder $x-0=0$ gilt. Also nur für $x=9$ oder $x=0$ ist diese Gleichung erfüllt: die Lösungen der Gleichung sind also $x=9$ und $x=0$.

Bei dieser Gleichung handelt es sich aber auch um eine quadratische Gleichung, was man durch Ausmultiplizieren bestätigt

$$(x-9)(x-0)=(x-9)x \;=\; x^2-9x \;=\; 0.$$

Fazit: Die gesuchte quadratische Gleichung lautet

$$x^2-9x \;=\; 0.$$

Bemerkung: Dies ist aber nicht die einzige quadratische Gleichung mit den Lösungen $x=9$ und $x=0$, denn durch Multiplikation mit einer von Null verschiedenen Zahl ändert sich deren Lösungsmenge nicht: also sind auch

$$2x^2-18x \;=\; 0$$

oder

$$-3x^2+27x \;=\; 0$$

quadratische Gleichungen mit den Lösungen $x=9$ und $x=0$. Möchte man alle quadratischen Gleichungen mit diesen Lösungen auf einen Schlag hinschreiben, könnte man das wie folgt bewerkstelligen

$$a\left(x^2-9x\right) \;=\; ax^2-9ax \;=\; 0, \qquad a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Übung: Wie lautet eine quadratische Gleichung mit den Lösungen -9 und 1?

2.3 Parameter in einer quadratischen Gleichung bestimmen

Bestimme u so, dass die quadratische Gleichung

$$6x^2 + ux - 35 = 0$$

die Lösung $x_1 = 5/6$ hat. Wie lautet dann die zweite Lösung?

Lösung: Setzt man x_1 in die Gleichung ein, dann muss sie erfüllt sein, d.h. es muss gelten

$$6\left(\frac{5}{6}\right)^2 + u\frac{5}{6} - 35 = 0$$

Wir formen äquivalent um und erhalten nacheinander

$$\begin{array}{rcl|l} & \dfrac{25}{6} + \dfrac{5}{6}u - 35 = 0 & & \cdot 6 \\ \Longleftrightarrow & 25 + 5u - 210 = 0 & & \\ \Longleftrightarrow & 5u - 185 = 0 & & \cdot\left(\dfrac{1}{5}\right) \\ \Longleftrightarrow & u - 37 = 0 & & +37 \\ \Longleftrightarrow & u = 37 & & \end{array}$$

Die gesuchte quadratische Gleichung lautet

$$6x^2 + 37x - 35 = 0$$

und hat die Lösungen

$$x_1 = -\frac{1}{12}\left(37 - \sqrt{37^2 - 4\cdot 6\cdot (\text{-}35)}\right) = -\frac{1}{12}\left(37 - \sqrt{2209}\right) = -\frac{1}{12}(37-47) = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}, \qquad \text{und}$$
$$x_2 = -\frac{1}{12}\left(37 + \sqrt{37^2 - 4\cdot 6\cdot (\text{-}35)}\right) = -\frac{1}{12}\left(37 + \sqrt{2209}\right) = -\frac{1}{12}(37+47) = -\frac{84}{12} = -7.$$

Die zweite Lösung lautet $x_2 = -7$.

2.4 Nochmals: Parameter in einer quadratischen Gleichung bestimmen

Bestimme u so, dass die quadratische Gleichung

$$6x^2 + ux + 35 = 0$$

(a) mindestens eine reelle Lösung hat?

(b) eine Doppellösung hat?

(c) zwei verschiedene Lösungen hat?

Lösung: Die Lösung der quadratischen Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hängt wesentlich von der **Diskriminante** $D = b^2 - 4ac$ ab. Damit die gegebene quadratische Gleichung erfüllbar ist, also mindestens eine (reelle) Lösung hat, muss $D \geq 0$ gelten. Im Fall $D = 0$ hat man eine Doppellösung und im Fall $D > 0$ zwei verschiedene Lösungen.

In unserem Fall ist die Diskriminante

$$D = u^2 - 4 \cdot 6 \cdot 35 \; = \; u^2 - 840.$$

und die ursprüngliche Gleichung

(a) ist erfüllbar, falls

$$\begin{aligned} D \geq 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad u^2 - 840 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u^2 \geq 840 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{u^2} \geq \sqrt{840} \\ &\Longleftrightarrow \quad |u| \geq \sqrt{840} \\ &\Longleftrightarrow \quad u \leq -\sqrt{840} \text{ oder } u \geq \sqrt{840}, \end{aligned}$$

(b) hat eine Doppellösung, falls

$$\begin{aligned} D = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad u^2 = 840 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{u^2} = \sqrt{840} \\ &\Longleftrightarrow \quad |u| = \sqrt{840} \\ &\Longleftrightarrow \quad u = -\sqrt{840} \text{ oder } u = \sqrt{840}, \end{aligned}$$

(c) hat zwei verschiedene Lösungen, falls

$$\begin{aligned} D > 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad u^2 - 840 > 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad u^2 > 840 \\ &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{u^2} > \sqrt{840} \\ &\Longleftrightarrow \quad |u| > \sqrt{840} \\ &\Longleftrightarrow \quad u < -\sqrt{840} \text{ oder } u > \sqrt{840}. \end{aligned}$$

Im Fall $-\sqrt{840} < u < \sqrt{840}$ hat die quadratische Gleichung keine (reelle) Lösung.

2.5 Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen

Löse die folgenden Gleichungen (die sich auf quadratische Gleichungen zurückführen lassen)

(a)	$x^4 + 2x^2 + 1 = 0$
(b)	$x^6 + 2x^3 + 1 = 0$
(c)	$(x-1)^4 - 2(x-1)^2 + 1 = 0$
(d)	$\left(\frac{1}{y}\right)^2 + \frac{2}{y} + 1 = 0$

Lösung: (a) Hier substituiert man $z = x^2$ und erhält die quadratische Gleichung in z

$$z^2 + 2z + 1 = 0 \quad \text{mit der Doppellösung} \quad z = -1.$$

Die Unbekannte x wird jetzt aus der quadratischen Gleichung

$$x^2 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 + 1 = 0$$

bestimmt. Diese quadratische Gleichung hat wegen $D = 0^2 - 4 = -4 < 0$ keine reellen Lösungen. Somit hat auch die ursprüngliche Gleichung keine (reellen) Lösungen.

(b) Hier substituiert man $z = x^3$ und erhält die selbe quadratischen Gleichung wie in (a) mit der Doppellösung $z = -1$. Wegen $z = x^3$ muss man jetzt die kubischen Gleichung

$$x^3 = -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 + 1 = 0$$

lösen. Eine Lösung, nämlich $x = -1$, findet man schnell. Ob es noch weitere (reelle) Lösungen gibt, erfahren wir, wenn wir die kubische Gleichung in faktorisierter Form schreiben

$$x^3 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 + 1 = (x+1)(x^2 + px + q) = 0.$$

Den quadratischen Faktor findet man durch Polynomdivision

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} = x^2 - x - 1.$$

Wegen

$$x^3 + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+1)(x^2 - x - 1) = 0.$$

muss also entweder $x = -1$ oder $x^2 - x - 1 = 0$ sein. Diese quadratische Gleichung hat wegen $D = (-1)^2 - 4 = -3 < 0$ keine (reellen) Lösungen. Somit hat auch die ursprüngliche Gleichung (b) nur die (reelle) Lösung $x = -1$.

(c) Hier substiuiert man $u = x - 1$ und erhält die Gleichung vierten Grades

$$u^4 - 2u^2 + 1 = 0$$

Durch eine weitere Substitution $z = u^2$ geht sie über in die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2z + 1 = 0 \quad \text{mit der Doppellösung} \quad z = 1.$$

Da aber $z = u^2$ und $z = 1$ gilt, müssen wir die quadratische Gleichung

$$u^2 = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad u^2 - 1 = 0$$

lösen. Die Lösungen sind $u_1 = 1$ und $u_2 = -1$. Schliesslich hat man wegen $u = x - 1$ (die erste Substitution) entweder $x - 1 = 1$, d.h. $x = 2$ oder $x - 1 = -1$, d.h. $x = 0$ als Lösungen der Gleichung (c).

(d) Hier substitutieren wir $z = 1/y$ und erhalten die quadratische Gleichung

$$z^2 + 2z + 1 = 0 \quad \text{mit der Doppellösung} \quad z = -1.$$

Es muss also gelten $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{-1} = -1$.

2.6 Nochmals: Gleichungen, die sich auf quadratische zurückführen lassen

Auch die folgenden Gleichungen lassen sich mit wenig Aufwand in quadratische Gleichungen überführen.

(a) Wurzelgleichungen, bei denen man nur einmal quadrieren muss, z.B.

$$8x + \sqrt{2x+12} = 6.$$

(b) Rationale GLeichungungen, die sich durch Umformen auf quadratische überführen lassen, z.B.

$$\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-2}{x-3} = \frac{x-3}{x-4} + \frac{x-4}{x-5}$$

Dabei muss allerdings beachtet werden, dass die Umformungen oft nicht äquivalent sind, d.h. die Lösungsmenge wird durch die Umformung verändert: es ist deshalb am Schluss zu kontrollieren, welche der gefundenen Lösungen die Ausgangsgleichung erfüllen!

Lösung: (a) Die Grundmenge dieser Gleichung ist wegen $2x+12 \geq 0$ das Intervall $\mathbf{G} = [-6, \infty)$. Wir lösen diese Wurzelgleichung durch äquivalente Umformungen. Dabei muss man ein bisschen mehr schreiben. Von Vorteil ist aber, dass man sich bei jedem Schritt genau überlegen muss, was man tut, man muss also z.B. wissen, dass $\sqrt{a^2} = |a|$ gilt, wobei $|a| = a$ nur für den Fall $a \geq 0$ zutrifft. Ein weiterer Vorteil ist der, dass man am Schluss keinen Test machen muss.

In unserem Beispiel hat man nacheinander

$$\begin{aligned}
8x + \sqrt{2x+12} = 6 \quad &\Longleftrightarrow \quad \sqrt{2x+12} = 6 - 8x \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x + 12 = (6-8x)^2 \text{ und } 6 - 8x \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 2x + 12 = 36 - 96x + 64x^2 \text{ und } 6 - 8x \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad 64x^2 - 98x + 24 = 0 \text{ und } x \leq 3/4 \\
&\Longleftrightarrow \quad 32x^2 - 49x + 12 = 0 \text{ und } x \leq 3/4 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{49 \pm \sqrt{49^2 - 4 \cdot 32 \cdot 12}}{64} \text{ und } x \leq 3/4 \\
&\Longleftrightarrow \quad x \in \left\{ \frac{49 - \sqrt{865}}{64}, \frac{49 + \sqrt{865}}{64} \right\} \text{ und } x \leq 3/4 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{49 - \sqrt{865}}{64}.
\end{aligned}$$

Somit ist die Lösungsmenge der Ausgangsgleichung $\mathbf{L} = \left\{ \frac{49 - \sqrt{865}}{64} \right\}$.

(b) Die Grundmenge dieser Gleichung ist $\mathbf{G} = \mathbb{R} \setminus \{2, 3, 4, 5\}$. Gleichnamig machen liefert nacheinander

$$\begin{aligned}
&(x-1)(x-3)(x-4)(x-5) + (x-2)(x-2)(x-4)(x-5) = (x-2)(x-3)^2(x-5) + (x-2)(x-3)(x-4)^2 \\
\Longleftrightarrow \quad &\left[(x-1)(x-3) + (x-2)^2\right](x-4)(x-5) = (x-2)(x-3)\left[(x-3)(x-5) + (x-4)^2\right] \\
\Longleftrightarrow \quad &\left[x^2 - 4x + 3 + x^2 - 4x + 4\right](x^2 - 9x + 20) = (x^2 - 5x + 6)\left[x^2 - 8x + 15 + x^2 - 8x + 16\right] \\
\Longleftrightarrow \quad &\left[2x^2 - 8x + 7\right](x^2 - 9x + 20) = (x^2 - 5x + 6)\left[2x^2 - 16x + 31\right] \\
\Longleftrightarrow \quad &2x^4 - 26x^3 + 119x^2 - 223x + 140 = 2x^4 - 26x^3 + 123x^2 - 251x + 186 \\
\Longleftrightarrow \quad &2x^2 - 14x + 23 = 0
\end{aligned}$$

Diese quadratische Gleichung hat die Lösungen

$$x_1 = \frac{1}{4}\left(14 + \sqrt{14^2 - 184}\right) = \frac{1}{2}\left(7 + \sqrt{3}\right) \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{1}{4}\left(14 - \sqrt{14^2 - 184}\right) = \frac{1}{2}\left(7 - \sqrt{3}\right).$$

und beide liegen in **G**.

2.7 Quadratische Ergängzung

Bringe die Gleichung

$$x^2 + 5x = -4$$

durch (quadratisches Ergänzen) auf die Form $(x+a)^2 = b$.

Lösung: Vergleicht man die rechte Seite von

$$(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$$

mit der linken Seite der gegebenen quadratischen Gleichung, erkennt man, dass $5 = 2a$ oder $a = 5/2$ gelten muss, denn dann hat man

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{5}{2}x + \frac{5^2}{2^2} \; = \; x^2 + 5x + \frac{25}{4}$$

und damit erhält man aus der ursprünglichen quadratischen Gleichung

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} = -4$$

oder

$$\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 = -4 + \frac{25}{4} \; = \; \frac{9}{4}.$$

2.8 Textgleichungen, die auf quadratische Gleichungen führen

In einem rechtwinkligen Dreieck von 36 cm Umfang ist die Hypotenuse um 3 cm länger als eine Kathete. Berechne die Hypotenuse.

Lösung: Wir führen die folgenden Bezeichnungen: a, b seien die beiden Katheten, c die Hypotenuse und U der Umfang des Dreiecks. Dann hat man folgenden Sachverhalt

(a) $U = a + b + c = 36,$

(b) $c = a + 3,$

(c) $c^2 = a^2 + b^2$ Satz von Pythagoras

Setzt man $c = a + 3$ in (a) ein findet man $b = 33 - 2a$. Jetzt setzen wir diese Ausdrücke in (c) ein und erhalten die quadratische Gleichung

$$(a+3)^2 = a^2 + (33-2a)^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2a^2 - 69a + 540 = 0$$

mit den Lösungen $a = 12$ und $a = 22.5$. Die zweite Lösung ist wegen $b = 33 - 2 \cdot 22.5 = -12$ keine Lösung des geometrischen Problems, da $b > 0$ gelten muss. Somit ist $a = 12$ und die gesuchte Hypotenuse ist $c = a + 3 = 12 + 3 = 15$.

Zur Kontrolle berechnen wir $b = 33 - 2a = 33 - 2 \cdot 12 = 9$ und erhalten für den Umfang $U = a + b + c = 12 + 9 + 15 = 36$.

3 Lineare Gleichungssysteme

Grundsatzfrage 3: … ein lineares Gleichungssystem mit maximal drei Variablen lösen (auch ohne Hilfsmittel).

Es wird hier die der Eliminationsmethode angelehnte Gauss-Eliminiation gezeigt. Dabei wird das Gleichungssystem durch Äquivalenzumformungen in eine Form gebracht, an welcher man die Lösung entweder direkt, oder durch einfaches Rückwärtseinsetzen sukzessive bestimmen kann. Es werden die folgenden Äquivalenzumformungen verwendet:

1. Vertauschen zweier Gleichungen,
2. Eine Gleichung mit einer von Null verschiedenen Zahl multiplizieren,
3. Ein beliebiges Vielfaches einer Gleichung zu einer anderen Gleichung addieren.

Eine Gleichung multipliziert man mit einer Zahl, indem man beide Seiten der Gleichung mit dieser Zahl multipliziert. Zwei Gleichungen addiert man, indem man jeweils die rechten Seiten addiert und auch die linken Seiten addiert.

3.1 Ein erstes Beispiel: genau eine Lösung

Verwenden Sie die Gauss-Elimination um die Lösung des folgenden Systems von 3 Gleichungen und 3 Unbekannten zu bestimmen

$$\begin{aligned} 3u+2v+w &= 1 \\ 2u+2v+2w &= 0 \\ -2u-2v+2w &= 1 \end{aligned}$$

Lösung:

Als erstes addieren wir das $-(2/3)$-fache der ersten Gleichung

$$-\frac{2}{3}(3u+2v+w) = -\frac{2}{3}\cdot 1 \quad \text{also} \quad -2u-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3}w = -\frac{2}{3}$$

zur zweiten Gleichung, d.h. wir addieren die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} -2u-\frac{4}{3}v-\frac{2}{3}w &= -\frac{2}{3} \quad \text{und} \\ 2u+2v+2w &= 0 \end{aligned}$$

und erhalten die neue zweite Gleichung

$$0u+\frac{2}{3}v+\frac{4}{3}w = -\frac{2}{3}$$

Als nächstes addieren wir das $(2/3)$-fache der ersten Gleichung

$$\frac{2}{3}(3u+2v+w) = \frac{2}{3}\cdot 1 \quad \text{also} \quad 2u+\frac{4}{3}v+\frac{2}{3}w = \frac{2}{3}$$

zur dritten Gleichung, d.h. wir addieren die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} 2u + \frac{4}{3}v + \frac{2}{3}w &= \frac{2}{3} \quad \text{und} \\ -2u - 2v + 2w &= 1 \end{aligned}$$

und erhalten die neue dritte Gleichung

$$0u - \frac{2}{3}v + \frac{8}{3}w = \frac{5}{3}$$

Nun präsentiert sich das Gleichungssystem in der From

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ +\frac{2}{3}v + \frac{4}{3}w &= -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3}v + \frac{8}{3}w &= \frac{5}{3} \end{aligned}$$

oder, wenn wir die zweite und dritte Gleichung mit 3 multiplizieren

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ +2v + 4w &= -2 \\ -2v + 8w &= 5 \end{aligned}$$

Jetzt addieren wir die zweite Gleichung zur dritten und erhalten

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ +2v + 4w &= -2 \\ 12w &= 3 \end{aligned}$$

Nun können wir die Unbekannten nacheinander durch Rückwärtseinsetzen berechnen

$$\begin{aligned} w &= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \\ v &= -1 - 2w = -1 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \\ u &= \frac{1}{3}(1 - 2v - w) = \frac{1}{3}\left(1 + 3 - \frac{1}{4}\right) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}. \end{aligned}$$

3.2 Ein zweites Beispiel: unendliche viele Lösungen

Verwenden Sie die Gauss-Elimination um die Lösung des folgenden Systems von 3 Gleichungen und 3 Unbekannten zu bestimmen

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ 2u + 2v - w &= 0 \\ 2v - 5w &= -2 \end{aligned}$$

Lösung: Addiert man das $-\frac{2}{3}$-fache der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung wird die neue zweite Gleichung

$$\frac{2}{3}v - \frac{5}{3}w = -\frac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad 2v - 5w = -2$$

Das folgende Gleichungssystem ist äquivalent zum gegebenen

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ 2v - 5w &= -2 \\ 2v - 5w &= -2 \end{aligned}$$

Jetzt subtrahieren wir die zweite Gleichung von der dritten und erhalten das neue, äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ 2v - 5w &= -2 \\ 0w &= 0 \end{aligned}$$

Aus der letzten Gleichung folgern wir, dass mann w beliebig wählen kann. Wir setzten deshalb $w = t \in \mathbb{R}$, d.h. w ist gleich einer beliebigen reellen Zahl $t \in \mathbb{R}$. Damit erhalten wir nacheinander

$$\begin{aligned} v &= \frac{1}{2}(-2 + 5w) \ = \ \frac{1}{2}(-2 + 5t) \ = \ -1 + \frac{5}{2}t \\ u &= \frac{1}{3}(1 - w - 2v) \ = \ \frac{1}{3}(1 - t + 2 - 5t) \ = \ \frac{1}{3}(3 - 6t) \ = \ 1 - 2t \end{aligned}$$

Die Lösungsmenge ist somit

$$\mathbf{L} = \left\{ (u, v, w) \middle| u = 1 - 2t, v = -1 + \frac{5}{2}, w = t, t \in \mathbb{R} \right\}$$

Geometrisch lässt sich diese Lösungsmenge als die Gerade

$$g : t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

im Raum darstellen.

3.3 Ein drittes Beispiel: keine Lösung

Verwenden Sie die Gauss-Elimination um die Lösung des folgenden Systems von 3 Gleichungen und 3 Unbekannten zu bestimmen

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ 2u + 2v - w &= 0 \\ 2v - 5w &= 1 \end{aligned}$$

Lösung: Addiert man das $-\frac{2}{3}$-fache der ersten Gleichung zur zweiten Gleichung wird die neue zweite Gleichung

$$\frac{2}{3}v - \frac{5}{3}w = -\frac{2}{3} \qquad \text{oder} \qquad 2v - 5w = -2$$

Das folgende Gleichungssystem ist äquivalent zum gegebenen

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ 2v - 5w &= -2 \\ 2v - 5w &= 1 \end{aligned}$$

Jetzt subtrahieren wir zweite Gleichung von der dritten und erhalten das neue, äquivalente Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3u + 2v + w &= 1 \\ 2v - 5w &= -2 \\ 0w &= 3 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist nicht lösbar, d.h. es gibt keine reelle Zahl w, die mit Null multipliziert die Zahl Drei ergibt. Man sagt auch: die letzte Gleichung ist ein Widerspruch!

Die letzte Gleichung entstand unter der Annahme, dass das Gleichungssystem eine Lösung hat. Dabei wurden lediglich äquivalente Umformungen gemacht, die bekanntlich die Lösungsmenge des Gleichungssystem nicht verändern.

Wir schliessen daraus, dass die Annahme, das Gleichungssystem habe eine Lösung, falsch war. Also hat das Gleichungssystem keine Lösung.