

## **Mathematik-Referenzaufgaben zum Rahmenlehrplan für die Berufsmaturität (RLP-BM 2012)**

### **Grundsatzfrage 1**

- ... Grundoperationen in verschiedenen Zahlenmengen unter Einhaltung der Regeln (Vorzeichenregeln, Hierarchie der Operationen) durchführen (auch ohne Hilfsmittel).
- ... algebraische Terme unter Einhaltung der Regeln für die Grundoperationen umformen, ohne Polynomdivision (auch ohne Hilfsmittel).
- ... einfache algebraische Terme faktorisieren (auch ohne Hilfsmittel).

Thomas Borer (HTW Chur)

## Referenzaufgaben zum RLP-BM 2012 Mathematik

Thomas Borer, 24.9.2013

### Grundsatzfrage 1

#### Aufgaben

1. Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke (ohne Hilfsmittel):

a)  $2 + 3 \cdot 4$

b)  $3^{-2}$

c)  $-2^4$

d)  $\sqrt{16}$

2. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke (ohne Hilfsmittel):

a)  $7x - 5z + 10y + 3y + 8z - 4x$

b)  $(32m + 13q) - (14m + 7q)$

c)  $(15a - 2b) - [7a - (2a + b)]$

d)  $5a^2b \cdot 4ab \cdot 3a^2b$

3. Multiplizieren Sie die folgenden Ausdrücke aus (ohne Hilfsmittel):

a)  $(p + q)^2$

b)  $(2x + 3y)^2$

c)  $(x - y)^2$

d)  $(2a - 3ax)^2$

e)  $(a + 2)(a - 2)$

f)  $(5xy + 3xz)(5xy - 3xz)$

g)  $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y)$

4. Faktorisieren Sie die folgenden Ausdrücke (ohne Hilfsmittel):

a)  $5a^2 - 10a^3 - 25a^4$

b)  $3a(x - a)^2 + 12a^2(x - a)$

c)  $a^2 - 4$

d)  $x^2 - 6x + 9$

e)  $2p^2 - 12pq + 18q^2$

5. Vereinfachen Sie die folgenden Brüche durch Kürzen (ohne Hilfsmittel):

a)  $\frac{14a}{18ab}$

b)  $\frac{ab}{a^2b^2c}$

c)  $\frac{8ab}{4a^2 - 4ab}$

d)  $\frac{p^2 + p}{p^2 - 1}$

e)  $\frac{x - y}{y - x}$

6. Bringen Sie die folgenden Brüche auf den Nenner  $10a^2b^2x$  (ohne Hilfsmittel):

a)  $\frac{4y}{2a^2x}$

b)  $\frac{5}{2ax}$

7. Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke als einen einzigen Bruch (ohne Hilfsmittel):

a)  $\frac{9x}{5} - \frac{6x}{5}$

b)  $\frac{7x - 3y}{a} - \frac{2x + 5y}{a}$

c)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3}$

d)  $\frac{a}{b} - \frac{c}{ab}$

$$e) \quad \frac{a}{a-b} - \frac{b}{a^2-b^2}$$

$$f) \quad \frac{t+7}{3t-6} - \frac{t+4}{t^2-2t}$$

8. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke (ohne Hilfsmittel):

$$a) \quad 6 \cdot \frac{5}{12}$$

$$b) \quad \frac{3}{4a} \cdot \frac{2}{9b}$$

$$c) \quad \frac{d-1}{18d} \cdot \frac{12d^2}{1-d}$$

$$d) \quad \frac{12pqr}{2pr}$$

$$e) \quad \frac{16ab + 12aq}{4a}$$

$$f) \quad \frac{30a^4b^3c^2}{5a^2bc}$$

$$g) \quad \frac{-2x^2 - 4x}{-2x}$$

$$h) \quad \frac{\frac{ax}{c}}{a}$$

$$i) \quad \frac{\frac{a}{b^2}}{\frac{a^2}{b}}$$

$$j) \quad \frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{y}}$$

$$k) \quad \frac{r^2 + \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r^2}}$$

9. Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke und schreiben Sie die Ergebnisse ohne Brüche (ohne Hilfsmittel):

$$a) \quad \frac{(a^2 b^3 a^4)^5}{(b^2 a^3 b^5)^2}$$

$$b) \quad \left( \frac{a^{-1} b^2}{a^{-3} b^4} \right)^{-5}$$

10. Bestimmen Sie alle reellen Zahlen  $x$ , für welche die folgenden Ausdrücke **nicht** definiert sind (ohne Hilfsmittel):

$$a) \quad x^2 - 7$$

$$b) \quad \frac{1}{x+2}$$

$$c) \quad \sqrt{x+3}$$

$$d) \quad \frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$$

## Lösungen

1. a)  $2 + 3 \cdot 4 = 2 + (3 \cdot 4) = 2 + 12 = 14$   
b)  $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$   
c)  $-2^4 = -(2^4) = -16$   
d)  $\sqrt{16} = 4$  (und nicht etwa  $\pm 4$ )
2. a)  $7x - 5z + 10y + 3y + 8z - 4x = 3x + 13y + 3z$   
b)  $(32m + 13q) - (14m + 7q) = 32m + 13q - 14m - 7q = 18m + 6q$   
c)  $(15a - 2b) - [7a - (2a + b)] = 15a - 2b - (7a - 2a - b) = 15a - 2b - (5a - b) = 15a - 2b - 5a + b = 10a - b$   
d)  $5a^2b \cdot 4ab \cdot 3a^2b = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot a \cdot a^2 \cdot b \cdot b \cdot b = 60a^5b^3$
3. a)  $(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$  (auswendig)  
b)  $(2x + 3y)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3y + (3y)^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$   
c)  $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$  (auswendig)  
d)  $(2a - 3ax)^2 = (2a)^2 - 2 \cdot 2a \cdot 3ax + (3ax)^2 = 4a^2 - 12a^2x + 9a^2x^2$   
e)  $(a + 2)(a - 2) = a^2 - 4$  (auswendig)  
f)  $(5xy + 3xz)(5xy - 3xz) = (5xy)^2 - (3xz)^2 = 25x^2y^2 - 9x^2z^2$   
g)  $(x^3 - x^2y + xy^2 - y^3)(x + y) = x^3 \cdot x + x^3 \cdot y - x^2y \cdot x - x^2y \cdot y + xy^2 \cdot x + xy^2 \cdot y - y^3 \cdot x - y^3 \cdot y$   
 $= x^4 + x^3y - x^3y - x^2y^2 + x^2y^2 + xy^3 - xy^3 - y^4 = x^4 - y^4$
4. a)  $5a^2 - 10a^3 - 25a^4 = 5a^2(1 - 2a - 5a^2)$   
b)  $3a(x - a)^2 + 12a^2(x - a) = [3a(x - a)][(x - a) + 4a] = 3a(x - a)(x - a + 4a) = 3a(x - a)(x + 3a)$   
c)  $a^2 - 4 = (a + 2)(a - 2)$  (binomische Formel erkennen)  
d)  $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$  (binomische Formel erkennen)  
e)  $2p^2 - 12pq + 18q^2 = 2(p^2 - 6pq + 9q^2) = 2(p - 3q)^2$  (binomische Formel erkennen)
5. a)  $\frac{14a}{18ab} = \frac{7}{9b}$  (mit Faktor 2a kürzen)  
b)  $\frac{ab}{a^2b^2c} = \frac{1}{abc}$  (mit Faktor ab kürzen)  
c)  $\frac{8ab}{4a^2 - 4ab} = \frac{8ab}{4a(a - b)} = \frac{2b}{a - b}$  (faktorisieren, mit Faktor 4a kürzen)  
d)  $\frac{p^2 + p}{p^2 - 1} = \frac{p(p + 1)}{(p + 1)(p - 1)} = \frac{p}{p - 1}$  (binomische Formel erkennen, mit Faktor (p + 1) kürzen)  
e)  $\frac{x - y}{y - x} = \frac{x - y}{-(x - y)} = -1$  (y - x = -(x - y) erkennen, mit Faktor (x - y) kürzen)
6. a)  $\frac{4y}{2a^2x} = \frac{4y \cdot 5b^2}{2a^2x \cdot 5b^2} = \frac{20b^2y}{10a^2b^2x}$  (erweitern mit Faktor 5b<sup>2</sup>)  
b)  $\frac{5}{2ax} = \frac{5 \cdot 5ab^2}{2ax \cdot 5ab^2} = \frac{25ab^2}{10a^2b^2x}$  (erweitern mit Faktor 5ab<sup>2</sup>)

7.

a)  $\frac{9x}{5} - \frac{6x}{5} = \frac{9x - 6x}{5} = \frac{3x}{5}$

b)  $\frac{7x - 3y}{a} - \frac{2x + 5y}{a} = \frac{(7x - 3y) - (2x + 5y)}{a} = \frac{7x - 3y - 2x - 5y}{a} = \frac{5x - 8y}{a}$

c)  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x \cdot 3}{2 \cdot 3} + \frac{x \cdot 2}{3 \cdot 2} = \frac{3x}{6} + \frac{2x}{6} = \frac{3x + 2x}{6} = \frac{5x}{6}$

d)  $\frac{a}{b} - \frac{c}{ab} = \frac{a \cdot a}{b \cdot a} - \frac{c}{ab} = \frac{a^2}{ab} - \frac{c}{ab} = \frac{a^2 - c}{ab}$

e)  $\frac{a}{a-b} - \frac{b}{a^2 - b^2} = \frac{a \cdot (a+b)}{(a-b) \cdot (a+b)} - \frac{b}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + ab}{a^2 - b^2} - \frac{b}{a^2 - b^2} = \frac{a^2 + ab - b}{a^2 - b^2}$

f)  $\frac{t+7}{3t-6} - \frac{t+4}{t^2-2t} = \frac{t+7}{3(t-2)} - \frac{t+4}{t(t-2)} = \frac{(t+7) \cdot t}{3(t-2) \cdot t} - \frac{(t+4) \cdot 3}{t(t-2) \cdot 3} = \frac{(t^2+7t) - (3t+12)}{3t(t-2)} = \frac{t^2+7t-3t-12}{3t(t-2)} = \frac{t^2+4t-12}{3t(t-2)} = \frac{(t+6)(t-2)}{3t(t-2)} = \frac{t+6}{3t}$

8.

a)  $6 \cdot \frac{5}{12} = \frac{6 \cdot 5}{12} = \frac{5}{2}$

b)  $\frac{3}{4a} \cdot \frac{2}{9b} = \frac{3 \cdot 2}{4a \cdot 9b} = \frac{1}{2a \cdot 3b} = \frac{1}{6ab}$

c)  $\frac{d-1}{18d} \cdot \frac{12d^2}{1-d} = \frac{(d-1) \cdot 12d^2}{18d \cdot (1-d)} = \frac{-(1-d) \cdot 12d^2}{18d \cdot (1-d)} = \frac{-2d}{3} = -\frac{2d}{3}$

d)  $\frac{12pqr}{2pr} = \frac{6q}{1} = 6q$

e)  $\frac{16ab + 12aq}{4a} = \frac{4a(4b + 3q)}{4a} = \frac{4b + 3q}{1} = 4b + 3q$

f)  $\frac{30a^4b^3c^2}{5a^2bc} = \frac{6a^2b^2c}{1} = 6a^2b^2c$

g)  $\frac{-2x^2 - 4x}{-2x} = \frac{-2x(x+2)}{-2x} = \frac{x+2}{1} = x+2$

h)  $\frac{\frac{ax}{c}}{a} = \frac{\frac{ax}{c}}{\frac{a}{1}} = \frac{ax}{c} \cdot \frac{1}{a} = \frac{ax \cdot 1}{c \cdot a} = \frac{x}{c}$

i)  $\frac{\frac{a}{b^2}}{\frac{a^2}{b}} = \frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{a^2} = \frac{a \cdot b}{b^2 \cdot a^2} = \frac{1}{ab}$

j)  $\frac{\frac{x}{1}}{\frac{1}{y}} = \frac{x}{1} \cdot \frac{y}{1} = \frac{x \cdot y}{1 \cdot 1} = xy$

k)  $\frac{r^2 + \frac{1}{r}}{r + \frac{1}{r^2}} = \frac{\frac{r^2}{1} + \frac{1}{r}}{\frac{r}{1} + \frac{1}{r^2}} = \frac{\frac{r^2 \cdot r + 1}{r}}{\frac{r \cdot r^2 + 1}{r^2}} = \frac{\frac{r^3 + 1}{r}}{\frac{r^3 + 1}{r^2}} = \frac{r^3 + 1}{r} \cdot \frac{r^2}{r^3 + 1} = \frac{(r^3 + 1) \cdot r^2}{r \cdot (r^3 + 1)} = \frac{r}{1} = r$

9.

a)  $\frac{(a^2 b^3 a^4)^5}{(b^2 a^3 b^5)^2} = \frac{(a^2)^5 (b^3)^5 (a^4)^5}{(b^2)^2 (a^3)^2 (b^5)^2} = \frac{a^{2 \cdot 5} b^{3 \cdot 5} a^{4 \cdot 5}}{b^{2 \cdot 2} a^{3 \cdot 2} b^{5 \cdot 2}} = \frac{a^{10} b^{15} a^{20}}{b^4 a^6 b^{10}} = \frac{a^{10+20} b^{15}}{a^6 b^{4+10}} = \frac{a^{30} b^{15}}{a^6 b^{14}} = \frac{a^{24} b}{1} = a^{24} b$

b)  $\left(\frac{a^{-1} b^2}{a^{-3} b^4}\right)^{-5} = \left(a^{-1-(-3)} b^{2-4}\right)^{-5} = \left(a^2 b^{-2}\right)^{-5} = (a^2)^{-5} (b^{-2})^{-5} = a^{2 \cdot (-5)} b^{-2 \cdot (-5)} = a^{-10} b^{10}$

10.

a)  $x^2 - 7$  ist für alle  $x \in \mathbb{R}$  definiert.

b)  $\frac{1}{x+2}$  ist nicht definiert, falls  $x + 2 = 0$ , d.h. falls  $x = -2$ .

c)  $\sqrt{x+3}$  ist nicht definiert, falls  $x + 3 < 0$ , d.h. falls  $x < -3$ .

d)  $\frac{1}{\sqrt{x^2-4}}$  ist nicht definiert, falls  $x^2 - 4 \leq 0$ , d.h. falls  $-2 \leq x \leq 2$ .