Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften

School of Engineering

Bachelorarbeit 2010

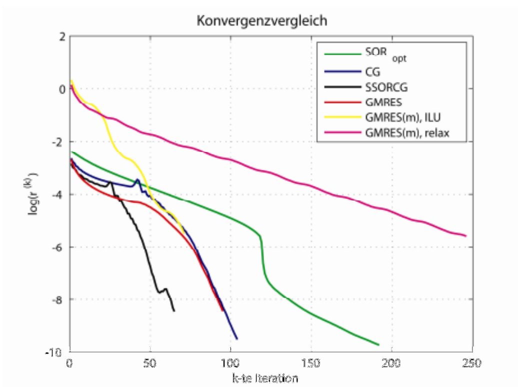
Studiengang Systemtechnik/Mechatronik

Schlecht konditionierte Gleichungssysteme

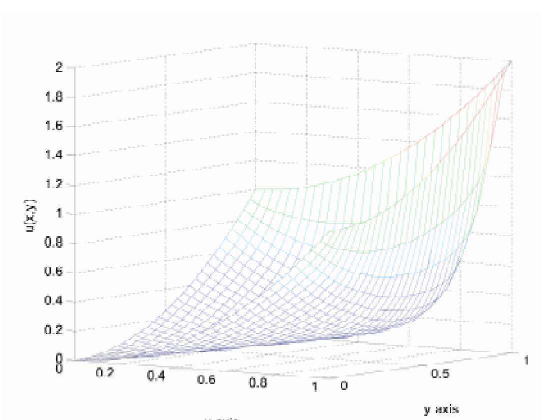
Absolvent
José Luis Hablützel

Dozent
Prof. Dr. H. Ungricht

Institut / Zentrum
Zentrum für Angewandte Mathematik und Physik



Verlauf des Fehlers bei verschiedenen iterativen Verfahren



Numerische Lösung der Konvektions-Diffusionsgleichung

In dieser Arbeit geht es um die Lösung grosser, schwach besetzter linearer Gleichungssysteme $Ax = b$ mit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $b \in \mathbb{R}^{n}$ unter Anwendung von sogenannten iterativen Lösungsverfahren und um die Abhängigkeit ihres Konvergenzverhaltens von der Konditionszahl $\kappa(A)$ der Systemmatrix A.

Iterative Lösungsverfahren kommen zum Einsatz, wenn direkte Lösungsmethoden wie der Gauss-Algorithmus, zum Beispiel aus Speicherplatzgründen nicht mehr angewendet werden können. Sie benötigen unter Umständen bedeutend weniger Speicherplatz und Rechenleistung, liefern aber, im Gegensatz zu direkten Lösungsverfahren, nur eine Näherung der Lösung eines Gleichungssystems, deren Genauigkeit allerdings vorgeschrieben werden kann. Dem Vorteil des oft geringeren Speicherplatz- und Rechenleistungsbedarfs steht der Nachteil gegenüber, dass iterative Lösungsmethoden spezifisch und nicht allgemein bei jedem Gleichungssystem anwendbar sind. Sie verlangen deshalb einiges an Wissen und Erfahrung für ihre sachgerechte Anwendung.

Zunächst wird mittels der numerischen Lösung von partiellen Differentialgleichungen - einer für die Praxis sehr wichtigen Aufgabe - gezeigt, warum die Lösung von grossen linearen Gleichungssystemen wichtig ist. Es wird an zwei Beispielen gezeigt, wie eine elliptische, partielle Differentialgleichung mit gegebenen Randbedingungen mit der Methode der finiten Differenzen diskretisiert werden kann. Daraus entsteht ein lineares Gleichungssystem, dessen Lösung eine Näherung der Lösung der partiellen Differentialgleichung liefert.

Anschliessend werden die bekanntesten Vertreter der sogenannten Splitting-Verfahren (Jacobi-, Gauss-Seidel- und Relaxationsverfahren) und diejenigen der sogenannten Krylov-Unterraum-Verfahren (Methode der konjugierten Gradienten und Methode der verallgemeinerten minimierten Residuen) behandelt. Auch ihre Eigenschaften und Konvergenzbedingungen sowie einige oft verwendete Möglichkeiten zur Vorkonditionierung werden da beschrieben.

Danach werden die hier vorgestellten Verfahren anhand von drei Randwertaufgaben hinsichtlich ihrer Konvergenzgeschwindigkeit verglichen. An dieser Stelle wird ersichtlich, welche Bedeutung die Kondition eines Gleichungssystems für ein iteratives Lösungsverfahren hat. Je besser die Kondition der Systemmatrix eines Gleichungssystems ist, umso schneller konvergiert das verwendete iterative Lösungsverfahren.

Schliesslich werden anhand von einer praxisnahen Aufgabenstellung die oben erwähnten Methoden eingesetzt, um eine Näherungslösung zu erzielen.